Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 9

Samedi 20 mai

Durée : 4 heures. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 – Divers

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^{\ln n}}$.

2. Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\binom{2n}{n}$.

3. On considère le script Python suivant :

```
def kapadnom(t):
    for k in range(len(t)-1)
        if t[k]=t[k+1]:
            return true
    return False
```

a) Il y a trois erreurs de syntaxe dans ce script, corrigez les.

b) Quel est le type du résultat de la fonction ? Et de son paramètre `t` ?

c) Que fait cette fonction ? Que ferait-elle si le `return False` était aligné avec le `if` ? Même question s'il était aligné avec l'autre `return`.

d) Écrivez une version de cette fonction avec une boucle `while` à la place de la boucle `for`, et sans `return` dans la boucle.

4. On veut calculer en Python la somme $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

a) Écrivez une fonction `zeta3(n)` qui renvoie la valeur de S_n, en sommant dans l'ordre des k croissants.

b) Pourquoi cette fonction renvoie-t-elle la même valeur pour tous les entiers $n > 250000$? (On précise que $S_n \in [1;2]$ pour tout entier n, que les `float` ont une mantisse de 53 bits et que $2^{-53} \approx 10^{-16}$.)

Exercice 2 – Résultant

Soient P et $Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes à coefficients complexes, de degré m et $n \in \mathbb{N}^*$ respectivement, notés :

$$P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

On appelle **résultant** de P et Q, noté $\mathrm{res}(P,Q)$, le déterminant de la matrice carrée suivante :

$$M_{P,Q} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_0 & \vdots & & \ddots & b_0 \\ a_m & & & a_1 & b_n & & & b_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

i.e. la matrice de la famille de polynômes $(P, XP, X^2P, \ldots, X^{n-1}P\,, Q, XQ, X^2Q, \ldots, X^{m-1}Q)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$. Cette matrice est donc carrée de taille $m+n$, ses n premières colonnes sont relatives à P, et ses m dernières relatives à Q.

1. **Cas particulier où $m = n = 2$.**

   On suppose dans cette question, et dans cette question seulement, que $m = n = 2$ et que les polynômes P et Q sont unitaires, de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = X^2 + a_1 X + a_0 \\ Q = X^2 + b_1 X + b_0 \end{array} \right. , \quad \text{et donc :} \quad \mathrm{res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ 1 & a_1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

   a. Montrer que $\mathrm{res}(P,Q) = (a_0 - b_0)^2 + (b_1 - a_1)(a_0 b_1 - a_1 b_0)$.

   b. On note β_1 et β_2 les deux racines (éventuellement confondues) de Q.
   Rappeler l'expression des coefficients b_0 et b_1 en fonction de β_1 et β_2.
   Montrer que $\beta_1^2 + \beta_2^2 = b_1^2 - 2b_0$ et que $\beta_1^2\beta_2 + \beta_1\beta_2^2 = -b_0 b_1$.

   c. Vérifier que $P(\beta_1) \times P(\beta_2) = \mathrm{res}(P,Q)$. En déduire la caractérisation suivante :

$$\mathrm{res}(P,Q) = 0 \iff P \text{ et } Q \text{ ont une racine commune.}$$

2. **Généralités sur le résultant.**

   En utilisant les propriétés du déterminant :

   a. Calculer $\mathrm{res}(P,P)$.

   b. Expliciter, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{res}(\lambda P,Q)$ et $\mathrm{res}(P,\lambda Q)$ en fonction de $\mathrm{res}(P,Q)$.

   c. Justifier que $\mathrm{res}(Q,P)$ est égal à $\mathrm{res}(P,Q)$ ou $-\mathrm{res}(P,Q)$
   Bonus : Justifier plus précisément que $\mathrm{res}(Q,P) = (-1)^{mn}\,\mathrm{res}(P,Q)$.

3. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ est $M_{P,Q}$. Par définition, on a donc $f(X^k) = X^k P$ pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, et $f(X^{n+j}) = X^j Q$ pour tout $j \in [\![0;m-1]\!]$.

On remarquera que tout polynôme $R \in \mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ s'écrit $R = U + X^n V$, où $U \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ (en mettant X^n en facteur dans les termes de degré $\geqslant n$ de R, ou en effectuant la division euclidienne de R par X^n).

a. Soient $U \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Montrer que $f(U + X^n V) = PU + QV$.

[On pourra écrire $U = \sum_{k=1}^{n-1} c_k X^k$ et $V = \sum_{j=0}^{m-1} d_j X^j$, et profiter de la linéarité de f.]

b. On suppose ici que P et Q ont une racine commune $a \in \mathbb{C}$.
Justifier qu'il existe P_1 et $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que $P = (X-a)P_1$ et $Q = (X-a)Q_1$.
Calculer $f(Q_1 - X^n P_1)$. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f ?

c. On suppose ici que P et Q n'ont aucune racine commune. Soit $R \in \mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ écrit sous la forme $R = U + X^n V$, où $U \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. On suppose que $f(R) = 0$.
Montrer qu'alors toutes les racines de P sont des racines de V. En déduire que $V = 0$, puis que $U = 0$. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f ?

d. À l'aide des questions précédentes, montrer la caractérisation suivante :

$$\mathrm{res}(P,Q) = 0 \iff P \text{ et } Q \text{ ont une racine commune.}$$

4. Discriminant d'un polynôme.

Si P est de degré $m \geqslant 2$, on appelle **discriminant** de P le scalaire $\Delta(P) = \dfrac{-1}{a_m}\,\mathrm{res}(P,P')$.

a. Vérifier que dans le cas $m = 2$, cette notion coïncide avec le discriminant de P bien connu.

b. À l'aide de **3d**, montrer que $\Delta(P) = 0$ si et seulement si P a au moins une racine multiple.

c. Quel est le discriminant du polynôme de degré trois $X^3 + pX + q$?

Exercice 3 – Fonction Gamma

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n(x) = \frac{n^x\, n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+x)} \quad \text{et} \quad w_n(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)$$

On rappelle que γ est la constante d'Euler, limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Simplifier $u_n(1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la limite de la suite $(u_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$, simplifier $u_n(p)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la limite de la suite $(u_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = \ln(u_{n+1}(x)) - \ln(u_n(x))$.

- ***a)*** Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n(x)$ est convergente.
- ***b)*** En déduire que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive qu'on notera $\Gamma(x)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- ***a)*** Montrer que la suite $(w_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- ***b)*** Montrer que $e^{w_n(x)} \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n(x)$ et en déduire la limite de la suite $(w_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation entre $u_n(x+1)$ et $u_n(x)$ et en déduire une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

Exercice 4 – Le retour de Tchebychev

On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des *polynômes de Tchebychev de seconde espèce* par :

$$U_0 = 1,\, U_1 = 2X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$$

1. **Quelques propriétés des U_n**

- ***a)*** Calculer U_2, U_3, U_4, U_5.
- ***b)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner le degré de U_n, son coefficient dominant, sa parité et $U_n(1)$.
- ***c)*** Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
- ***d)*** Démontrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\sin((n+1)\theta) = U_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$.
- ***e)*** En déduire les racines de U_n sur $]-1;1[$, puis toutes les racines de U_n.

2. **Orthogonalité**

Pour P, $Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit $\langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

- ***a)*** Démontrer que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ainsi défini est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- ***b)*** Rappeler la formule $\sin a \sin b = ...$
  Par un changement de variable astucieux, calculer l'intégrale $\langle U_n,U_m \rangle$ pour n, $m \in \mathbb{N}$.
- ***c)*** En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Quelle est la norme de U_n ?
- ***d)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P \perp U_n$.