# Devoir maison n$^{\text{o}}$ 14

Pour jeudi 7 juin

## Partie A – Polynômes de Tchebychev (le retour)

On définit la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *polynômes de Tchebychev de première espèce* par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

***1.*** Déterminer $T_2$ et $T_3$.

***2.*** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de $T_n$.

***3.*** Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
Montrer aussi que $(T_0,T_1,\dots T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***4.*** Établir par récurrence les identités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\operatorname{ch}(x)) = \operatorname{ch}(nx)$$

***5.*** En déduire que $|T_n(x)| \leqslant 1$ pour $|x| \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

***6.*** En déduire également que $|T_n(x)| > 1$ pour $x > 1$, si $n \in \mathbb{N}^*$.

***7.*** En utilisant l'identité $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$, montrer que $T_n$ a $n$ racines réelles distinctes dans $[-1;1]$, que l'on précisera.

***8.*** Montrer que $T_n$ est scindé à racines simples et écrire sa décomposition en facteurs irréductibles.

$\triangleright$ Dans cette question et dans la suite du sujet, quand un entier naturel $n$ est donné, on pourra utiliser la notation $x_k = \dfrac{2k-1}{2n}\pi$, pour $k \in [\![1;n]\!]$.

## Partie B – Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

À un couple $(P,Q)$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ on associe le réel :

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^\pi P(\cos x)Q(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

***1.*** Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

***2.*** Soient $n$, $m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$. À l'aide d'une formule trigonométrique judicieuse, calculer $\langle T_n,T_m\rangle$.

***3.*** En déduire que $T_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

***4.*** Calculer $\langle T_0,T_0\rangle$. Calculer ensuite $\langle T_n,T_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

***5.*** En utilisant ***A-2***, ***B-3*** et ***B-4***, montrer que $\langle T_n,X^n\rangle = \dfrac{\pi}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

***6.*** Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

***7.*** Quelle famille obtient-on en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1,X,\dots,X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ ?

## Partie C – Calcul exact d'une intégrale

À tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on associe l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(P) = \int_0^\pi P(\cos x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n(P) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} P(\cos(x_k))$$

On note aussi, pour $j \in [\![0;n]\!]$, $c_j = \sum_{k=1}^{n} \cos(jx_k)$.

***1.*** Calculer $c_0$.

***2.*** Pour tout $j \in [\![1;n-1]\!]$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \left(e^{ij\pi/n}\right)^k$.

***3.*** En déduire que $c_j = 0$ pour tout $j \in [\![1;n-1]\!]$.

***4.*** Pour $p \in [\![0;n-1]\!]$, calculer $I(T_p)$ et $S_n(T_p)$.

***5.*** En déduire que $I(P) = S_n(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

***6.*** Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note $Q$ et $R$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de $P$ par $T_n$, autrement dit $P = QT_n + R$ avec $\deg R < n$.
Montrer que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

***7.*** En déduire en utilisant ***B-3*** que $I(P) = I(R)$.

***8.*** Calculer $I(T_{2n})$ et $S_n(T_{2n})$, que constate-t-on ?

## Partie D – Une méthode de quadrature pour le calcul d'une intégrale

À toute fonction continue $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$, on associe l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(f) = \int_0^\pi f(\cos x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\cos(x_k))$$

On espère approcher l'intégrale $I(f)$ avec la somme $S_n(f)$.

***1.*** Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = I(f)$.

***2.*** On se donne un réel $a > 0$ et on pose $f : x \mapsto \ln(a^2 - 2ax + 1)$.
Montrer que $f$ est continue sur $[-1;1]$. (On a donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = I(f)$.)

***3.*** Donner la liste des racines $2n$-ièmes de $-1$ dans $\mathbb{C}$. On les exprimera en fonction de $x_1$, ..., $x_n$ et on les classera par paires de racines conjuguées.

***4.*** Donner la factorisation de $X^{2n}+1$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

***5.*** En déduire que la factorisation de $X^{2n}+1$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit

$$X^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - 2\cos(x_k)X + 1)$$

***6.*** Montrer que $S_n(f) = \frac{\pi}{n}\ln\left(a^{2n}+1\right)$.

***7.*** Donner la limite de $\frac{\pi}{n}\ln\left(a^{2n}+1\right)$ quand $n \to +\infty$, en distinguant les cas $a \in \,]0;1[$ et $a > 1$.
En déduire la valeur de $I(f)$.

***8.*** Donner un équivalent de $S_n(f) - I(f)$ quand $n \to +\infty$, en distinguant les cas $a \in \,]0;1[$ et $a > 1$.