Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 5

Samedi 13 janvier

Durée : 4 heures.

La calculatrice est interdite.

On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction. N'oubliez aucun argument nécessaire. Évitez les arguments superflus ou peu clairs. N'essayez pas de « bluffer » et de faire croire que vous avez la solution quand ce n'est pas le cas.

Les résultats obtenus doivent être mis en évidence en les encadrant. Pensez à laisser une marge, à laisser un espace en haut de la première page, à numéroter les pages, et tout ça **avant** *la fin de l'épreuve.*

La copie doit être rendue à l'heure. Même si vous n'avez pas tout fini, je vous conseille de terminer d'écrire quelques minutes avant la fin, de décompresser et de relire pour vérifier la présentation.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 – Divers

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer les limites suivantes :

- ***a)*** $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}$
- ***b)*** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln x}$
- ***c)*** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}$, où a et b sont deux réels.

2. Donner un équivalent simple de :

- ***a)*** $x^x - 1$ lorsque x tend vers 0.
- ***b)*** $\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ lorsque x tend vers 0.
- ***c)*** $\lfloor x \rfloor$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- ***d)*** $1-\cos\ln x$ quand x tend vers 1.

3. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$?
Est-elle prolongeable par continuité ?

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est paire et que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle atteint sa borne inférieure.

Exercice 2 – Étude d'une suite

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt[3]{v_n + \frac{1}{2^n}}$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = x^3 - x - \frac{1}{2^n}$$

Dresser le tableau de variations de f_n.

3. Montrer que l'équation $x^3 - x - \dfrac{1}{2^n} = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on notera α_n.

4. Pour tout réel positif x, étudier le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

5. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6. Montrer que $v_n \geqslant \alpha_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

7. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

8. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Problème – Fonction de Takagi

L'objectif de ce problème est de construire une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$, mais qui n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$ et qui n'est monotone sur aucun intervalle de longueur non nulle.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $g(x) = \left| x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $g_n(x) = \dfrac{g(2^n x)}{2^n}$.

Étude des fonctions g et g_n.

1. Montrer que g est 1-périodique, et que $g(1-x) = g(x)$ pour tout réel x.

2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Vérifier que g est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

4. Justifier que $g(x)$ est la distance du réel x à l'entier le plus proche de x.

5. Dans un même repère, tracer la courbe représentative de g, puis celles de g_1 et de g_2.

6. Montrer que g_n est 1-lipschitzienne, pour tout entier naturel n.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, g_n est affine sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{2^{n+1}} ; \dfrac{k+1}{2^{n+1}}\right]$. Quelles valeurs peut prendre la pente sur cet intervalle ?

Construction et continuité de f.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_k(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On note $f(x)$ sa limite, on a ainsi construit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Montrer que f_n est 1-périodique puis que f est 1-périodique.
Montrer que $f(x) = f(1-x)$ pour tout réel x.

3. Montrer que $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

4. En déduire que si $|x - y| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{n+3}{2^n}$.

5. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f n'est dérivable nulle part.

Dans cette question, on fixe un $x \in \mathbb{R}$ et on souhaite montrer que f n'est pas dérivable en x.
On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\lfloor 2^{n+1}x \rfloor}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\lfloor 2^{n+1}x \rfloor + 1}{2^{n+1}}.$$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

2. Vérifier que $f(a_n) = f_n(a_n)$ et $f(b_n) = f_n(b_n)$.

3. Justifier que $\dfrac{f_n(b_{n+1}) - f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} = \dfrac{f_n(b_n) - f_n(a_n)}{b_n - a_n}$.

4. On pose $\Delta_n = \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$. Vérifier que $|\Delta_{n+1} - \Delta_n| = 1$.

5. On suppose que (u_n) et (v_n) sont deux suites tendant vers une même limite ℓ, et (λ_n) une suite quelconque à valeurs dans $[0;1]$. Montrer que $\lambda_n u_n + (1-\lambda_n)v_n \to \ell$.

6. On raisonne par l'absurde et on suppose que f est dérivable en x.
Montrer qu'alors $\Delta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(x)$.

7. Conclure.

La fonction f n'est monotone sur aucun intervalle non trivial.

1. On fixe $x = \dfrac{k}{2^n}$, avec $(k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et on pose $x_p = x + \dfrac{1}{2^p}$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un rang $P \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geqslant P$, alors $f(x_p) > f(x)$.

2. En déduire que f n'est monotone sur aucun intervalle contenant au moins deux points.