Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 6

Mercredi 31 janvier

Durée : 3 heures.

La calculatrice est interdite.

On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction. N'oubliez aucun argument nécessaire. Évitez les arguments superflus ou peu clairs. N'essayez pas de « bluffer » et de faire croire que vous avez la solution quand ce n'est pas le cas.

Les résultats obtenus doivent être mis en évidence en les encadrant. Pensez à laisser une marge, à laisser un espace en haut de la première page, à numéroter les pages, et tout ça **avant** *la fin de l'épreuve.*

La copie doit être rendue à l'heure. Même si vous n'avez pas tout fini, je vous conseille de terminer d'écrire quelques minutes avant la fin, de décompresser et de relire pour vérifier la présentation.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 – Dimension

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On définit les trois vecteurs $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (1,1,1)$.
La famille $\mathcal{F} = (u,v,w)$ est-elle libre ? Est-elle génératrice ?

2. Soient E un espace de dimension fini n, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Démontrer que $F \cap G$ contient au moins un vecteur non nul.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de dimension finie. On suppose que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

Problème – Pseudo-inverses

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On dit qu'un endomorphisme g de E est un *pseudo-inverse* de f si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :

(i) $f \circ g \circ f = f$

(ii) $g \circ f \circ g = g$

(iii) $f \circ g = g \circ f$

On rappelle que pour tout endomorphisme f, et tout k entier, f^k désigne l'endomorphisme $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{k \text{ termes}}$, avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

A - Exemples et contre-exemples

1. Trouver un pseudo-inverse pour chacun des endomorphismes suivants. (La justification n'a pas besoin d'être longue.)

- ***a)*** L'endomorphisme Id_E.
- ***b)*** Un automorphisme u de E.
- ***c)*** Un projecteur p de E.

2. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on considère l'application

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x+y,0) \end{array}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère un endomorphisme g de E et on note $g(e_1) = (a,b)$ et $g(e_2) = (c,d)$.

- ***a)*** Montrer que f_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
- ***b)*** Déterminer une base de $\ker f_1$ et une base de $\mathrm{Im}\, f_1$. L'endomorphisme f_1 est-il injectif ? surjectif ? Est-ce un projecteur ?
- ***c)*** Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Im}\, f_1 \oplus \ker f_1$.
- ***d)*** Calculer $g(x,y)$ pour tout vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur a, b, c et d pour qu'on ait $g \circ f_1 = f_1 \circ g$.
- ***e)*** Montrer que f_1 admet un unique pseudo-inverse, que l'on déterminera.

3. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on considère l'application

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array}$$

On admet que f_2 est un endomorphisme de E.

- ***a)*** A-t-on $\mathbb{R}^2 = \ker f_2 \oplus \mathrm{Im}\, f_2$?
- ***b)*** Déterminer tous les endomorphismes g qui commutent avec f_2. On peut s'inspirer de la question ***2d***.
- ***c)*** En déduire que f_2 n'a pas de pseudo-inverse.

B - D'autres pseudo-inverses

Soit f un endomorphisme de E admettant un pseudo-inverse g.

1. Montrer que g admet aussi un pseudo-inverse, à déterminer.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f^k admet un pseudo-inverse, à déterminer.

3. Soit h un automorphisme de E.
Montrer que l'endomorphisme $\tilde{f} = h \circ f \circ h^{-1}$ admet un pseudo-inverse, à déterminer.

4. La composée de deux endomorphismes admettant chacun un pseudo-inverse admet-elle nécessairement un pseudo-inverse ?
Indication : On pourra s'intéresser à l'application f_1 *de la partie* ***A****, et au projecteur sur* $\mathrm{Vect}(e_2)$ *parallèlement à* $\mathrm{Vect}(e_1)$.

5. On veut démontrer que le pseudo-inverse de f, s'il existe, est unique. On suppose donc que f admet deux pseudo-inverses g et h. En considérant $f \circ g \circ f \circ h$, démontrer que $g = h$.

C - Condition nécessaire d'existence

Soit f un endomorphisme de E admettant un pseudo-inverse g.

1. Démontrer que l'endomorphisme $f \circ g = g \circ f$ est un projecteur.

2. ***a)*** Démontrer que pour tous φ, $\psi \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$\ker(\varphi) \subset \ker(\psi \circ \varphi) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$$

b) En déduire que $\ker(g \circ f) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.
Indication : on pourra considérer $\ker(f \circ g \circ f)$ *et* $\mathrm{Im}(f \circ g \circ f)$.

3. Démontrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

D - Condition suffisante d'existence

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$. On va démontrer que f admet un pseudo-inverse.

1. Vérifier que l'espace $\mathrm{Im}\, f$ est stable par f (un sev V est dit stable si $f(V) \subset V$).

On peut donc considérer l'endomorphisme f_I induit par f sur $\mathrm{Im}\, f$:

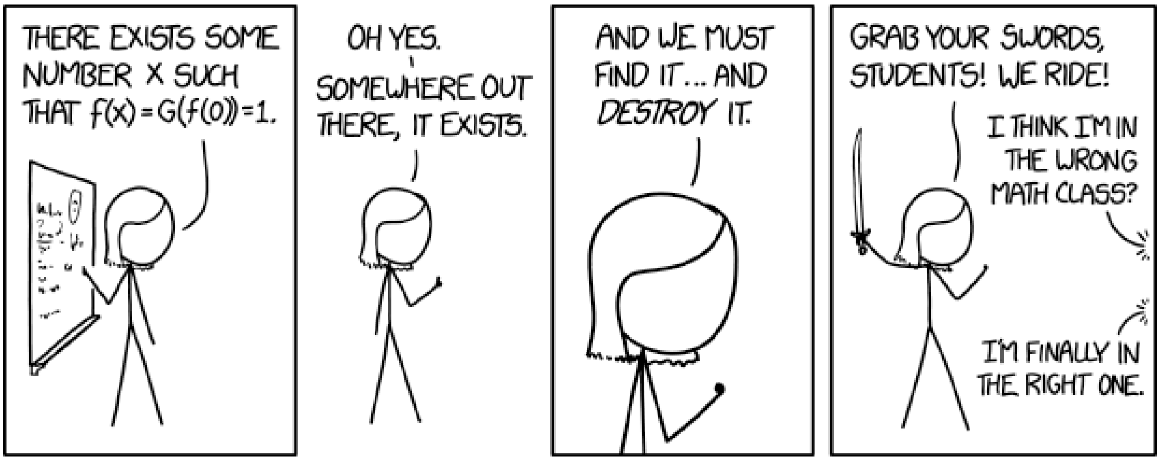
$$f_I \; : \; \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}\, f & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

2. Démontrer que f_I est bijectif.

3. On définit l'application $g : E \to E$ de la façon suivante : à tout vecteur $x \in E$ dont la décomposition sur la somme directe $E = \ker f + \mathrm{Im}\, f$ est $x = x_K + x_I$, on associe le vecteur $g(x) = x_K + f_I^{-1}(x_I)$.

a) Démontrer que g est linéaire.

b) Démontrer que g est le pseudo-inverse de f.


THERE EXISTS SOME NUMBER X SUCH THAT f(X) = G(f(0)) = 1.
OH YES.
SOMEWHERE OUT THERE, IT EXISTS.
AND WE MUST FIND IT... AND DESTROY IT.
GRAB YOUR SWORDS, STUDENTS! WE RIDE!
I THINK I'M IN THE WRONG MATH CLASS?
I'M FINALLY IN THE RIGHT ONE.