Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 9

Samedi 19 mai

Durée : 4 heures.
La calculatrice est interdite.
On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction. N'oubliez aucun argument nécessaire. Évitez les arguments superflus ou peu clairs. N'essayez pas de « bluffer » et de faire croire que vous avez la solution quand ce n'est pas le cas.
Les résultats obtenus doivent être mis en évidence en les encadrant. Pensez à laisser une marge, à laisser un espace en haut de la première page, à numéroter les pages, et tout ça **avant** *la fin de l'épreuve.*
La copie doit être rendue à l'heure. Même si vous n'avez pas tout fini, je vous conseille de terminer d'écrire quelques minutes avant la fin, de décompresser et de relire pour vérifier la présentation.
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 – Techniques

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}$ et $\sum \dfrac{\cos^2 n}{n^2}$.

2. Trouver tous les triplets $(a,b,c) \in (\mathbb{C}^*)^3$ solutions du système $\left\{\begin{array}{ccc} a+b+c & = & 5 \\ abc & = & -8 \\ 1/a + 1/b + 1/c & = & -1/4 \end{array}\right.$

3. Quelles sont les racines complexes du polynôme $B = X^3 - X^2 + X - 1$?
En déduire le reste dans la division de $A = X^{2018} + X + 1$ par $B = X^3 - X^2 + X - 1$.

4. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 + X^2 + 1$.

5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Montrer que si a est racine de P, alors a^2 est aussi racine de P.
En déduire que $a = 0$ ou que a est une racine de l'unité.

6. Soient a, b et c trois réels. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 2 – Un déterminant tridiagonal

Soit $\theta \in \,]0;\pi[$. Pour $n \geqslant 2$, on définit

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

1. Calculer D_2 et D_3.

2. Linéariser l'expression $D_2 \times \sin\theta$ et en déduire une expression simplifiée de D_2.
De même, linéariser $D_3 \times \sin\theta$ et en déduire une expression simplifiée de D_3.

3. Pour $n \geqslant 4$, établir une relation de récurrence liant D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

4. En déduire la valeur de D_n, pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 3 – Une diagonalisation

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

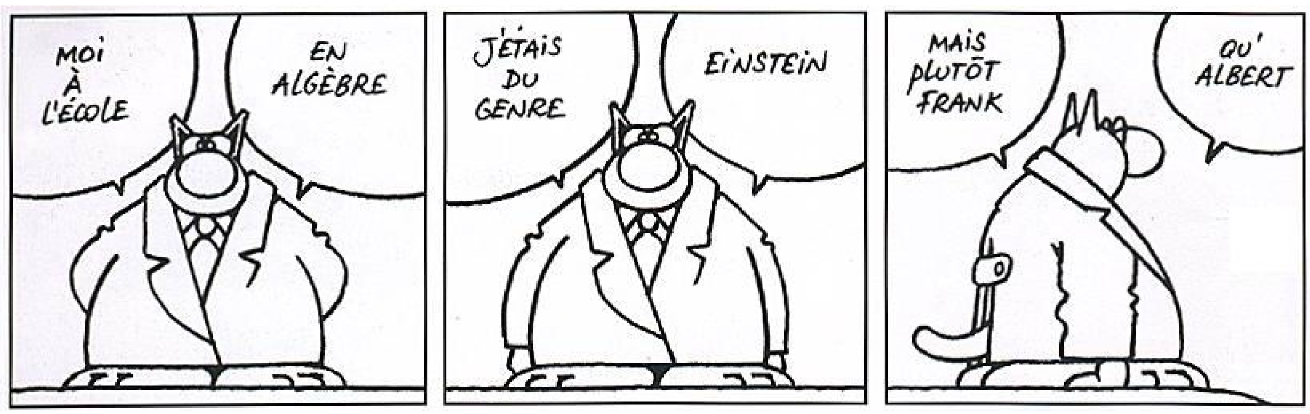
1. Déterminez tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

2. Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\ker(M - \lambda I_3)$.

3. À l'aide des résultats précédents, construire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale.

4. Quels sont le déterminant et la trace de l'endomorphisme f ?

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, quels sont le déterminant et la trace de l'endomorphisme f^n ?



Exercice 4 – Polynômes de Legendre

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes à coefficients réels suivants :

$$P_n = (X+1)^n (X-1)^n \quad \text{et} \quad L_n = P_n^{(n)}$$

Les polynômes L_n sont appelés les polynômes de Legendre.

1. *Généralités.*

a) Déterminer L_0, L_1, L_2 et L_3.

b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le polynôme L_n est de degré n.
Préciser son coefficient dominant.

c) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

d) Comparer les polynômes $L_n(X)$ et $L_n(-X)$, en distinguant selon la valeur de n.

2. *Racines.*

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n]\!]$, montrer que le polynôme $P_n^{(k)}$ possède k racines distinctes dans l'intervalle $]-1; 1[$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme L_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines appartiennent à l'intervalle $]-1; 1[$.

3. *Valeurs en ± 1.*

Appliquer la formule de Leibniz à $L_n = P_n^{(n)}$ et en déduire la valeur de $L_n(1)$ et de $L_n(-1)$.

4. *Relation de récurrence.*

a) Vérifier les relations

$$\begin{array}{lll} (1) & \forall n \in \mathbb{N}, & P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n \\ (2) & \forall n \in \mathbb{N}^*, & P''_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1} \end{array}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant n fois la relation (1) et $n-1$ fois la relation (2), établir une relation simple liant L_{n+1}, L_n et L_{n-1}.

5. *Coefficients.*

En appliquant la formule du binôme de Newton au polynôme $P_n = (X^2-1)^n$ puis en dérivant n fois, trouver la décomposition de L_n sur la base canonique. On exprimera les coefficients de L_n à l'aide de coefficients binomiaux.

6. *Une propriété remarquable.*

a) Soient deux entiers n et m tels que $n > m$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)\, L_m(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} L_n(t)\, P(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

Exercice 5 – Interpolation

Le but de la première question est de montrer qu'étant donnée une fonction f et $n+1$ points x_0, x_1, ..., x_n, il existe un unique polynôme de degré au plus n qui prend les mêmes valeurs que f en les points x_k.

Dans la deuxième question, on essaie de majorer l'écart entre la fonction f et ce polynôme d'interpolation.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif et x_0, x_1, ..., x_n des réels deux à deux distincts.
Soit Φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = (\, P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\,)$$

a) Montrer que l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) On note $\mathcal{B} = (\, e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec $e_0 = (1,0,\ldots,0)$, $e_1 = (0,1,0,\ldots,0)$, jusqu'à $e_n = (0,\ldots,0,1)$. Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on note U_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(U_i) = e_i$.
Montrer que pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on a $U_i = \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0;n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$.

c) Montrer que la famille $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Exprimer la matrice de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$.
Quel est le déterminant de cette matrice ?

e) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté P_f, qui vérifie :

$$P_f(x_0) = f(x_0),\ P_f(x_1) = f(x_1),\ ...,\ P_f(x_n) = f(x_n)$$

On dit que P_f est le *polynôme d'interpolation* de la fonction f aux points x_0, x_1, ..., x_n.

2. Soit x_0, x_1, ..., x_n des réels appartenant à un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$) tels que

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a;b]$ et $\overline{x}$ un réel de $[a;b]$ différent de x_0, x_1, ..., x_n.
On note P_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points x_0, x_1, ..., x_n et Q_f le polynôme d'interpolation de f aux points x_0, x_1, ..., x_n, $\overline{x}$. On pose $W(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - x_k)$.

a) Établir l'existence d'un réel λ tel que $Q_f - P_f = \lambda W$.

b) Soit h la fonction définie sur $[a;b]$ par $\forall t \in [a;b]$, $h(t) = f(t) - Q_f(t)$.
Montrer que la fonction h s'annule en $n+2$ points de $[a;b]$.
En déduire qu'il existe un $\theta \in\ ]a;b[$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.

c) En déduire la valeur de λ puis montrer que $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \dfrac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times W(\overline{x})$.

d) Finalement, montrer que pour tout $t \in [a;b]$, on a

$$|f(t) - P_f(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times \sup_{[a;b]} |W| \times \sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}|$$