# Devoir maison n$^{\text{o}}$ 9

Pour mercredi 19 décembre

## Exercice 1 – Dénombrement des dérangements

Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble $[\![1;N]\!]$ des entiers de 1 à $N$.

Si $\sigma$ est une permutation de $[\![1;N]\!]$ (c'est-à-dire une bijection de $[\![1;N]\!]$ sur lui-même), on appelle *point fixe* de $\sigma$ tout élément $a$ de $[\![1;N]\!]$ tel que $\sigma(a) = a$.

Pour tout nombre entier $p$ tel que $0 \leqslant p \leqslant N$, on note $F(N,p)$ le nombre de permutations de $[\![1;N]\!]$ qui ont exactement $p$ points fixes.

On convient que $F(0,0) = 1$.

***1.*** ***a.*** Montrer que $F(N,N) = 1$ et que $F(N,N-1) = 0$.

***b.*** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} F(N,k) = N!$.

***2.*** On pose $\omega_N = F(N,0)$. Autrement dit, $\omega_N$ est le nombre de permutations de $[\![1;N]\!]$ qui n'ont aucun point fixe (une permutation sans point fixe est aussi appelée un *dérangement*).
On convient que $\omega_0 = 1$.

***a.*** Donner la liste de tous les dérangements de $[\![1;3]\!]$.
Combien valent $\omega_1$, $\omega_2$ et $\omega_3$ ?

***b.*** Montrer que, pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant N$, on a $F(N,k) = \dbinom{N}{k}\omega_{N-k}$.

***c.*** En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!} = 1$.

***d.*** En raisonnant par récurrence, établir la relation : $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}$.

***e.*** On note $u_N = \omega_N/N!$ la proportion des dérangements parmi toutes les permutations de $[\![1;N]\!]$. Montrer que les suites extraites d'indices pairs et impairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

## Exercice 2 – Un critère de convergence

On considère dans cet exercice une suite $(u_n)$ à termes strictement positifs.
On suppose que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0; +\infty]$.

***1.*** On suppose dans cette question que $\ell < 1$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{\ell+1}{2}$.
En considérant la monotonie éventuelle de la suite $(u_n)$ (c'est-à-dire la monotonie à partir d'un certain rang), montrer que $(u_n)$ tend vers 0.

***2.*** On suppose dans cette question que $\ell > 1$. Par une stratégie analogue à la question précédente, montrer que $(u_n)$ tend vers $+\infty$.

***3.*** On va voir dans cette question qu'on ne peut rien conclure dans le cas où $\ell = 1$.

***a)*** Donner un exemple de suite $(u_n)$ vérifiant l'hypothèse $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$, telle que $u_n \to +\infty$.
Donner un deuxième exemple pour lequel $u_n \to 0$, puis un troisième pour lequel $u_n \to 2$.

***b)*** (★) Pour tout entier $n$, on pose $u_n = 2 + \cos(\pi\sqrt{n})$.
Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ et que $(u_n)$ n'a pas de limite.

***4.*** On souhaite affiner le cas critique $\ell = 1$. On suppose désormais que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$, et qu'on a plus précisément $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, où $a \in \mathbb{R}^*$.
On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (On pourra admettre que $H_n \to +\infty$ : on l'a démontré dans l'exercice 10.2).
On pose aussi $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_n$ pour tout entier $n$.

***a)*** Exprimer $w_n$ en fonction de $u_{n+1}$ et $u_0$.

***b)*** Écrire un équivalent simple de $v_n$.

***c)*** On suppose dans cette question que $a > 0$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $v_n > \dfrac{a}{2n}$.
Montrer ensuite qu'il existe deux constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $w_n \geqslant \alpha H_n + \beta$ à partir d'un certain rang, et en déduire que $u_n \to +\infty$.

***d)*** On suppose dans cette question que $a < 0$.
En utilisant une stratégie analogue à celle de la question précédente, montrer que $u_n \to 0$.

***5.*** *Application :* Déterminer la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de $\dbinom{2n}{n} 4^{-n}$.