Devoir maison n° 11

Pour lundi 21 janvier

Exercice 1

On définit l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c,d) & \longmapsto & (a+b, a-d, b+d) \end{array}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$.

2. Déterminer des vecteurs u_1, ..., $u_n \in \mathbb{R}^4$ tels que $\ker f = \mathrm{Vect}(u_1,...,u_n)$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un plan vectoriel que l'on précisera.

4. On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $e_1 = (1,0,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0,0)$.
Montrer que F et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.
Donner la décomposition de $x = (1,2,3,4)$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $\ker(f)$.

5. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, f$ dans F.

Exercice 2

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On définit l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & f \circ u \end{array}$$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer qu'on a $\ker \Phi = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, u \subset \ker f\}$.
En déduire que u surjectif $\Rightarrow$ Φ injectif.

2. On définit maintenant l'application :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & u \circ f \end{array}$$

a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer qu'on a $\ker \Psi = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, f \subset \ker u\}$.
En déduire que u injectif $\Rightarrow$ Ψ injectif.

3. Montrer l'équivalence $\Phi^2 = 0 \iff \Psi^2 = 0 \iff \mathrm{Im}\, u \subset \ker u$.

Exercice 3 – Cœur et nilespace d'un endomorphisme

On considère dans cet exercice un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $K_n = \ker(u^n)$ et $I_n = \operatorname{Im}(u^n)$.

1. ***a)*** Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
(C'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n \subset K_{n+1}$.)

b) Démontrer qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \ker(u^n) = \ker(u^{n+1}) \Rightarrow \ker(u^{n+1}) = \ker(u^{n+2})$$

En déduire que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit strictement croissante sur $\mathbb{N}$, soit strictement croissante jusqu'à un certain rang (qu'on notera k) à partir duquel elle est stationnaire.

2. ***a)*** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

b) Démontrer qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \operatorname{Im}(u^n) = \operatorname{Im}(u^{n+1}) \Rightarrow \operatorname{Im}(u^{n+1}) = \operatorname{Im}(u^{n+2})$$

En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit strictement décroissante sur $\mathbb{N}$, soit strictement décroissante jusqu'à un certain rang (qu'on notera i) à partir duquel elle est stationnaire.

3. On définit aussi $K = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $I = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, les ensembles K et I sont appelés respectivement le nilespace et le cœur de l'endomorphisme u.

a) Montrer que K et I sont des sev de E.

b) Montrer que K et I sont stables par u.

c) Que valent K et I lorsque u est un automorphisme de E ?

d) Que valent K et I lorsque u est un endomorphisme nilpotent de E ?

e) Que valent K et I pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $u : (a,b,c,d) \mapsto (b,c,0,d)$?

4. On dit que u est de *caractère fini* si les deux suites $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires. On suppose à partir de maintenant que u est de caractère fini.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'implication

$$\begin{cases} \ker(u^n) \subsetneq \ker(u^{n+1}) \\ \operatorname{Im}(u^n) = \operatorname{Im}(u^{n+1}) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \ker(u^{n+1}) \subsetneq \ker(u^{n+2})$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'implication

$$\begin{cases} \ker(u^n) = \ker(u^{n+1}) \\ \operatorname{Im}(u^n) \subsetneq \operatorname{Im}(u^{n+1}) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Im}(u^{n+1}) \subsetneq \operatorname{Im}(u^{n+2})$$

c) En déduire que $k = i$.

d) Montrer que l'application $u_K : \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ (c'est-à-dire la restriction de u à K, au départ et à l'arrivée) est bien définie et est un endomorphisme nilpotent de K.

e) Montrer que l'application $u_I : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ (c'est-à-dire la restriction de u à I, au départ et à l'arrivée) est bien définie et est un automorphisme de I.