Devoir maison n° 15

—

Calculer cent mille décimales de π en Python

Pour lundi 18 mars

Partie A – Une formule pour la fonction arc tangente

Pour tout réel $x \in [-1;1]$ et tout entier naturel n, on note $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$.

On note aussi $R_n(x) = \arctan(x) - S_n(x)$.

1. En utilisant une formule de Taylor, exprimer $R_n(x)$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction $\arctan^{(2n+2)}$.

2. ***a)*** Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe quelconque et $k \in \mathbb{N}$.
Expliciter la dérivée k-ième de $t \mapsto \dfrac{1}{t+\lambda}$.

b) En remarquant que $\dfrac{1}{1+t^2}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{t+i} + \dfrac{b}{t-i}$, où a et b sont deux complexes à déterminer, expliciter $\arctan^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$. (On exprimera $\arctan^{(k)}(t)$ comme somme de deux fractions rationnelles à coefficients complexes.)

c) En déduire que $\forall t \in [-1;1]\,,\ \left|\arctan^{(2n+2)}(t)\right| \leqslant (2n+1)!$

3. ***a)*** Démontrer la majoration : $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+2}}{2n+2}$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \arctan(x)$ lorsque $x \in [-1;1]$.

On pourra écrire plus simplement : $\forall x \in [-1;1]\,,\ \arctan x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

Partie B – La formule de Machin[1]

4. On pose $\theta = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$. Démontrer avec soin que $\theta \in \ ]0;\pi[$.

5. Rappeler la formule pour $\tan(a+b)$.
Calculer $\tan\left(2\arctan\dfrac{1}{5}\right)$ puis $\tan\left(4\arctan\dfrac{1}{5}\right)$.

6. Simplifier $\tan\theta$, puis établir la formule de Machin : $\quad \pi = 16\arctan\dfrac{1}{5} - 4\arctan\dfrac{1}{239}$.

1. D'après John Machin, 1680–1751.

Partie C – Mise en œuvre en Python

7. On souhaite calculer une approximation décimale de π à 10^{-D} près. On se sert de la partie A : en calculant une somme $S_N(x)$, on obtient une valeur approchée de $\arctan x$ à $|R_N(x)|$ près, et $|R_N(x)|$ peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité en choisissant un N assez grand.

- ***a)*** Si on part de $\pi = 4\arctan(1)$, à partir de quel rang N est-on sûr d'avoir $|R_N(1)| \leqslant \dfrac{1}{4}10^{-D}$?
  La formule $\pi = 4\arctan(1)$ est-elle utilisable en pratique pour calculer un grand nombre D de décimales ?
- ***b)*** Expliquer pourquoi la formule de Machin $\pi = 16\arctan {}^1\!/_5 - 4\arctan {}^1\!/_{239}$ est plus intéressante en pratique que la formule simple $\pi = 4\arctan(1)$.

8. On programme en Python[2] le calcul de D décimales de π en utilisant la formule de Machin.
On choisit de ne pas utiliser de flottants (qui ont une précision trop limitée), on effectue tous les calculs en nombres entiers et on renvoie plutôt $\left\lfloor 10^D \pi \right\rfloor$.
Comprendre le programme suivant et compléter la partie manquante.

```
def calcule_pi(D):

    pi_approx = 0

    terme = 16 * 10**D // 5
    k = 0
    while terme != 0:
        pi_approx += terme // (2*k+1)
        terme //= -25
        k += 1

    terme = .................
    k = 0
    while ...................
        ....................
        ....................
        ....................

    return(pi_approx)
```

9. De nombreuses formules analogues à celles de Machin ont été découvertes. Par exemple :

(A) $\pi = 4\arctan {}^1\!/_2 + 4\arctan {}^1\!/_3$

(B) $\pi = 8\arctan {}^1\!/_3 + 4\arctan {}^1\!/_7$

(C) $\pi = 48\arctan {}^1\!/_{18} + 32\arctan {}^1\!/_{57} - 20\arctan {}^1\!/_{239}$

(D) $\pi = 176\arctan {}^1\!/_{57} + 28\arctan {}^1\!/_{239} - 48\arctan {}^1\!/_{682} + 96\arctan {}^1\!/_{12943}$

(E) $\pi = 48\arctan {}^1\!/_{49} + 128\arctan {}^1\!/_{57} - 20\arctan {}^1\!/_{239} + 48\arctan {}^1\!/_{110443}$

Laquelle d'entre elles est la plus efficace en pratique pour calculer π ?

2. En 1706, John Machin a utilisé sa formule pour calculer à la main 100 décimales de π.