Devoir maison n° 17

Pour mercredi 10 avril

Exercice 1 – En deux lignes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de $(A,B,C,D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^4$ solution de : $\left\{ \begin{array}{ccccc} AB & + & CD & = & I_n \\ BA & + & DC & = & 0_n \end{array} \right.$

Exercice 2 – Diagonalisation et calcul de puissances

On note $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et on appelle $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, expliciter $f(x,y,z)$.

2. Déterminer toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible. (On utilisera la méthode du pivot en discutant au cours du calcul selon la valeur de λ.)

3. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$, $\ker(f + \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$.

4. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. On appelle $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Expliciter la matrice P.

6. Quelle relation relie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

7. Calculer P^{-1}.

8. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n.

Exercice 3 (★) – Un calcul de rang

Déterminer en fonction de a, $b \in \mathbb{C}$ le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4 – Drapeaux

Dans cet exercice, E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n. On appelle *drapeau* de E toute famille finie $\mathcal{D} = (E_0, E_1, \ldots, E_r)$ de sous-espaces vectoriels de E (avec $r \geqslant 1$) qui vérifie :

- $E_0 = \{0_E\}$
- $E_r = E$
- $E_k \subsetneq E_{k+1}$ pour tout $k \in [\![0; r-1]\!]$.

1. ***a)*** Montrer qu'un drapeau $\mathcal{D} = (E_0, E_1, \ldots, E_r)$ de E vérifie $r \leqslant n$.
Un drapeau $\mathcal{D}$ sera dit *complet* si $r = n$.

b) Montrer que si $\mathcal{D}$ est un drapeau complet, alors $\dim E_k = k$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

2. Soit f un endomorphisme de E et $\mathcal{D} = (E_0, E_1, \ldots, E_r)$ un drapeau. On dit que $\mathcal{D}$ est *stable* par f si chaque E_k est stable par f, c'est-à-dire si : $f(E_k) \subset E_k$ pour tout $k \in [\![0; r]\!]$.

a) Un exemple : on suppose que f est nilpotent d'indice 3.
Montrer que la famille $(\{0_E\}, \ker f, \ker f^2, E)$ est un drapeau stable par f.

b) Montrer que si f est un automorphisme et si $\mathcal{D}$ est stable par f, alors $\mathcal{D}$ est également stable par l'automorphisme réciproque f^{-1}.

3. Dans cette question, on se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. On pose $E_0 = \{0_E\}$ et, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. On note $\mathcal{D} = (E_0, E_1, \ldots, E_n)$.
On se donne aussi un endomorphisme f et on appelle $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un drapeau complet de E.

b) Montrer l'équivalence :

$$\mathcal{D} \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$$

c) En utilisant les questions précédentes, montrer finalement le résultat du cours : *Une matrice triangulaire supérieure inversible a pour inverse une matrice triangulaire supérieure.*

Exercice 5 – Calcul par blocs

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Calculer le produit $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_n \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right) M \left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$.

2. En déduire le rang de M en fonction de A et B.

3. Lorsque A et $B - A$ sont inversibles, calculer M^{-1}.