Devoir maison n° 20

Pour mardi 28 mai

Exercice 1 – Règle de d'Alembert

On considère dans cet exercice une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et on souhaite déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ de la valeur de ℓ.

1. On suppose dans cette question que $\ell > 1$.

a) Montrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

2. On suppose dans cette question que $\ell < 1$.

a) On fixe un réel $K \in \,]\ell;1[$.
Montrer qu'il existe une constante C telle que $u_n \leqslant C \times K^n$ à partir d'un certain rang.

b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

3. On examine enfin quelques exemples pour lesquels $\ell = 1$.

a) Donner un exemple simple de série divergente pour laquelle $\ell = 1$.

b) Donner un exemple simple de série convergente avec $\ell = 1$.

> En résumé (et cette propriété est à connaître) :
>
> • Si $\ell > 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.
> • Si $\ell < 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
> • Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

4. *Une application.*
On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$, où x est un paramètre réel positif.

Déterminer un réel R ayant la propriété suivante : cette série converge pour tout $x \in [0;R[$ et diverge pour tout $x \in \,]R;+\infty[$.

Exercice 2 – Règle de Raabe-Duhamel

Dans cet exercice, on énonce un critère de convergence qui précise le cas ambigu de la règle de d'Alembert.

On considère toujours une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que si $\alpha < 0$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

2. Soit β un réel quelconque et $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Montrer qu'on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où a est un réel à déterminer.

3. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$, on souhaite démontrer qu'alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

On fixe un réel $\beta \in \left]1;\alpha\right[$.

a) Justifier que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang.

b) Montrer l'existence d'un réel positif K tel qu'on ait $u_n \leqslant K v_n$ à partir d'un certain rang.

c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

4. On suppose maintenant que $\alpha \in \left[0;1\right[$. En adaptant le raisonnement de la question précédente, démontrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente. (On pourra choisir un β tel que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge).

5. En considérant les séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n \ln^2 n}$, montrer qu'on ne peut pas conclure lorsque $\alpha = 1$.

6. *Deux applications.*

a) On se donne deux réels a, $b > 0$ et on pose, pour tout entier n :

$$u_n = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)}$$

En utilisant la règle de Raabe-Duhamel, énoncer une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a,b) pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b) Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \sqrt{n!}\prod_{k=1}^{n} \sin\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

Exercice 3 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

On peut résoudre les questions indépendantes suivantes en considérant un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire bien choisi.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$.

2. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. On pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}$ pour tous n, $p \in \mathbb{N}$.

3. Soient A, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles symétriques.
Montrer que $(\mathrm{tr}(AB+BA))^2 \leqslant 4\,\mathrm{tr}(A^2)\,\mathrm{tr}(B^2)$.