Devoir maison n$^{\mathrm{o}}$ 21

Pour mercredi 6 juin

Exercice 1 – Adjoint

Dans cet exercice, E est un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit qu'un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ est *adjoint* de f s'il vérifie :

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x),y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$

1. Montrer que si f admet un endomorphisme adjoint, alors cet adjoint est unique.
Dans la suite on suppose que cet adjoint existe et on le note f^*.

2. Montrer que l'on a :

$$\operatorname{Im} f^* \subset (\ker f)^{\perp} \quad \text{et} \quad \ker f^* \subset (\operatorname{Im} f)^{\perp}$$

3. Par des considérations de dimension, montrer qu'on a en fait égalité :

$$\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^{\perp} \quad \text{et} \quad \ker f^* = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$$

$$\text{et qu'on a} \quad \operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f$$

4. Soient u et v deux endomorphismes admettant des adjoints u^* et v^*, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer l'existence et expliciter les adjoints suivants :

$$(u+v)^*, \quad (u \circ v)^*, \quad (\lambda u)^*, \quad (u^*)^*, \quad \mathrm{Id}_E^*$$

Exercice 2 – Déterminant de Gram

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Lorsque $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille finie de vecteurs de E (le nombre de vecteurs n'est pas nécessairement égal à la dimension de l'espace), on appelle *déterminant de Gram* de cette famille le réel suivant :

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle & \ldots & \langle u_1, u_p\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle & \ldots & \langle u_2, u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_p, u_1\rangle & \langle u_p, u_2\rangle & \ldots & \langle u_p, u_p\rangle \end{vmatrix} = \det\left((\langle u_i, u_j\rangle)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \right)$$

On appelle également *matrice de Gram* la matrice $M(u_1, u_2, \ldots, u_p) = (\langle u_i, u_j\rangle)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, de sorte que $G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \det M(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

1. *Exemples*

- ***a)*** Si u est un vecteur quelconque de E, préciser $G(u)$.
- ***b)*** Si u et v sont deux vecteurs de E, expliciter $G(u,v)$.
  Montrer ensuite que $G(u,v) \geqslant 0$ en précisant le cas d'égalité.
- ***c)*** Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille telle $u_1 \perp u_i$ pour tout $i \in [\![2;p]\!]$.
  Montrer qu'alors $G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \|u_1\|^2\, G(u_2, \ldots, u_p)$.
  Quel est le déterminant de Gram d'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ orthogonale ?

2. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille quelconque.

- ***a)*** Montrer qu'échanger deux vecteurs (opération de transposition $u_i \leftrightarrow u_j$) ne modifie pas le déterminant de Gram :

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots u_p) = G(u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots u_p)$$

- ***b)*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![2;p]\!]$. Montrer l'égalité :

$$G(u_1 + \lambda u_i, u_2, \ldots, u_p) = G(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

  (Autrement dit, puisqu'on peut transposer les vecteurs en laissant le déterminant invariant, une opération de transvection $u_i \leftarrow u_i + \lambda u_j$ ne modifie pas non plus le déterminant de Gram.)
- ***c)*** En déduire que si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée, alors $G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$.
- ***d)*** En déduire également que si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre, et si $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est son orthogonalisée de Schmidt, alors $G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = G(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.
- ***e)*** Démontrer finalement : $G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de F.
Soit x un vecteur de E et x_F son projeté orthogonal sur F. En calculant $G(x - x_F, u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de deux façons différentes, démontrer que la distance de x à F vérifie :

$$d(x,F)^2 = \frac{G(x, u_1, u_2, \ldots, u_p)}{G(u_1, u_2, \ldots, u_p)}$$