Devoir surveillé n° 2

Samedi 13 octobre

Durée : 4 heures. La calculatrice est interdite.

On attachera une grande importance à la qualité de la présentation et de la rédaction.

Pensez à encadrer/souligner les résultats, à numéroter les pages, à tracer une marge si vous utilisez des feuilles sans marge, et tout cela ***avant*** *la fin de l'épreuve.*

Les quatre premiers exercices sont constitués de questions indépendantes (les dernières questions de l'exercice 4 sont les plus dures). Les exercices 5 et 6 sont plus longs et difficiles. Dans l'exercice 5, on étudie des équations différentielles du second ordre à coefficients non constants. Dans l'exercice 6, on calcule explicitement un cosinus remarquable, c'est une question liée à la construction à la règle et au compas d'un polygône régulier à 17 côtés (mais l'exercice lui même ne contient pas de géométrie).

Les six exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1 – Logique et raisonnement

On considère les trois propositions suivantes :

$$\begin{aligned}
(A) &\quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin x = ax + b \\
(B) &\quad : \quad \exists x \in [4;5]\,, (x \leqslant 0 \text{ ET } x > 1) \text{ OU } x = 4 \\
(C) &\quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}, (e^x = x - 1 \Rightarrow x > 1)
\end{aligned}$$

1. Démontrer les propositions (A), (B) et (C). *(Les démonstrations doivent être courtes, simples et ne doivent pas s'éloigner des bons principes de rédaction vus en cours.)*

2. Écrire la négation des propositions (A), (B) et (C).

Exercice 2 – Racines de l'unité

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1.

a) Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$. *(cours)*

b) On note $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$. Simplifier $(1-\omega)T$ et en déduire la valeur de T.

2. Simplifier $(1-j)(3-4j) + \dfrac{2+j}{1+j}$, où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 3 – Trigonométrie

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer une primitive sur $[-1;1]$ de la fonction arccos.

2. Montrer l'égalité $\arctan \frac{4}{3} = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. Montrer que $\arcsin(\text{th} x) = \arctan(\text{sh}\, x)$ pour tout réel x.

Exercice 4 – Équations différentielles

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(1+x^2)y' - y = 1$.
Déterminer l'unique solution qui vérifie $y(\sqrt{3}) = 0$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2\,\text{ch}\, x$.

3. On considère l'équation différentielle $x^3 y'' - 2xy + 3 = 0$, à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) On pose $z = xy' + y$. Montrer que y est solution de $x^3y'' - 2xy + 3 = 0$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser.

b) Déterminer les fonctions z solutions.

c) En déduire les solutions de $x^3 y'' - 2xy + 3 = 0$.

4. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ \cos(x)\, y'' + \sin(x)\, y' - \cos^3(x)\, y = 0$.
Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on définit l'intervalle $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

a) On veut d'abord résoudre (E) sur l'intervalle I_0. On pose $z(x) = y(\arcsin x)$ pour tout $x \in\ ]-1;1[$ (ou encore $y(x) = z(\sin x)$ pour tout $x \in I_0$).
Montrer que y est solution de (E) sur I_0 si et seulement si z vérifie $z'' - z = 0$ sur $]-1;1[$.

b) En déduire les solutions de (E) sur I_0.

c) Pour $k \in \mathbb{Z}$, déterminer les solutions de (E) sur I_k.

d) Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 – Racines de solutions d'équations du second ordre

On s'intéresse dans cet exercice aux solutions (à valeurs dans $\mathbb{R}$) des équations différentielles

$$(E_q)\ :\ y'' + q(x)y = 0,$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

$\triangleright$ Lorsque q n'est pas constante, on ne sait pas exprimer en général les solutions de (E_q) à l'aide de fonctions usuelles.

$\triangleright$ On admet que le résultat du cours sur l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy d'ordre 2 reste vrai pour les équations (E_q), lorsque q est continue.

$\triangleright$ On appelle *racine* d'une solution f de (E_q) tout réel x tel que $f(x) = 0$, et deux racines $x_1 < x_2$ sont dites *consécutives* lorsque f ne s'annule pas sur $]x_1; x_2[$.

1. *Préliminaire : lorsque q est constant strictement positif.*
Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer les solutions de $(E_k) : y'' + ky = 0$. Démontrer que toute solution non nulle a une infinité de racines et que deux racines consécutives sont séparées de $\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

2. *Entrelacement de racines.*
Dans cette question, on fixe deux fonctions continues p et q, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) \leqslant q(x)$. On considère les deux équations différentielles :

$$(E_p)\ :\ y'' + p(x)y = 0$$

$$(E_q)\ :\ y'' + q(x)y = 0$$

On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de (E_p) et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de (E_q). Pour tout réel x, on note $W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$.

a) Montrer que la fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.
Pour tout réel x, exprimer $W'(x)$ en fonction de $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ et $q(x)$.

b) Soient a et b (avec $a < b$) deux racines consécutives de f.
Montrer que f est de signe constant sur $]a;b[$.
$\triangleright$ *Quitte à changer f en $-f$, on supposera dans la suite que $f > 0$ sur $]a;b[$.*

c) Montrer que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont non nuls.

d) En exprimant ces nombres dérivés comme limites de taux d'accroissement, montrer que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

e) En raisonnant par l'absurde et en considérant la monotonie de W, montrer que g s'annule au moins une fois sur $[a;b]$.
$\triangleright$ *On a ainsi montré qu'entre deux racines de f il y a toujours une racine de g.*

3. *Estimations de q et racines d'une solution.*
Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et g une solution non nulle de (E_q).

a) On suppose que pour tout x on a $q(x) \geqslant k$, où k est une constante strictement positive. Démontrer que g s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur $\pi/\sqrt{k}$.
(On pourra utiliser les questions ***1*** et ***2***.)

b) On suppose que pour tout x on a $q(x) \leqslant k$, où k est une constante strictement positive. Démontrer que g s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à $\pi/\sqrt{k}$.

4. *Application : l'équation de Bessel*
On fixe un réel α et on considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (dite de Bessel) :

$$(E)\ :\ x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

a) Soit f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction $g : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(E')\ :\ z'' + \left(1 - \frac{4\alpha^2 - 1}{4x^2}\right) z = 0$$

b) Soit f une solution non nulle de (E).
Déduire de ce qui précède que si $\alpha \geqslant 1/2$, alors f s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur π, et si $\alpha \leqslant 1/2$, alors f s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à π.

Exercice 6 – Calcul de $\cos\frac{\pi}{17}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et a, $h \in \mathbb{R}$, on pose :

$$C_n(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh) \quad \text{et} \quad S_n(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh)$$

1. Calculer les deux sommes $C_n(a,h)$ et $S_n(a,h)$. On pourra distinguer selon la valeur de h.

On note pour la suite de l'exercice $\theta = \dfrac{\pi}{17}$, et on pose :

$$x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$

2. Montrer que $x_1 > 0$.

3. Calculer la somme $x_1 + x_2$.

4. Rappeler la formule de linéarisation de $\cos a \cos b$, puis montrer que $x_1 x_2 = -1$.
[C'est plus difficile que la question précédente, il ne faut pas hésiter à mener des calculs un peu brutaux pour aboutir.]

5. En déduire des expressions simplifiées de x_1 et x_2.
[Dans cette question et jusqu'à la fin de l'exercice, on appelle « expression simplifiée » une expression qui ne fait intervenir que les opérations $+$, $-$, $\times$, $/$, $\sqrt{\cdot}$ et des nombres entiers.]

On pose maintenant :

$$y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta), \qquad y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta), \qquad y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$$

6. Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.

7. En déduire des expressions simplifiées de y_1, y_2, y_3 et y_4.

8. Donner une expression simplifiée du produit $\cos(\theta)\cos(13\theta)$.

9. En déduire une méthode pour démontrer l'égalité :

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}}\right)$$

[On ne demande pas d'effectuer le calcul, juste d'indiquer la méthode. Si néanmoins vous ne résistez pas à la tentation de faire le calcul en entier, et si vous en venez à bout, on accordera des points bonus. On recommande de ne se lancer dans un tel calcul que s'il n'y a plus d'autre question à aborder dans le DS...]