Devoir surveillé n° 3

Samedi 17 novembre

Durée : 4 heures. La calculatrice est interdite.

On attachera une grande importance à la qualité de la présentation et de la rédaction.
On insiste sur le fait qu'il est ***indispensable*** *de respecter les bons principes de rédaction vus en classe (C'est indispensable pour obtenir les points du correcteur, mais aussi, de toute façon, pour raisonner correctement et résoudre les questions posées).*

Pensez à encadrer/souligner les résultats, à numéroter les pages, à tracer une marge si vous utilisez des feuilles sans marge, et tout cela ***avant*** *la fin de l'épreuve.*

Les deux premiers exercices contiennent des questions courtes et indépendantes.
Les exercices ***3*** *et* ***4*** *sont des problèmes de plus grande ampleur, plus difficiles.*

Exercice 1 – Applications, relations et compagnie

Les quatre questions sont indépendantes.

1. On définit sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ une relation $\sim$ en posant :

$$\forall\,(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \qquad (p,q) \sim (p',q') \;\Leftrightarrow\; pq' = p'q$$

a) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

b) Expliciter la classe de $(0,1)$.

2. On se donne une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ une relation $\ll$ par :

$$\forall\,x, y \in \mathbb{R}, \qquad x \ll y \;\Leftrightarrow\; f(y) - f(x) \geqslant |y - x|$$

a) Démontrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

b) Préciser la relation $\ll$ dans le cas où $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

3. Soient E un ensemble et $p : E \to E$ une application qui vérifie $p \circ p = p$.

a) Montrer que p est injective si et seulement si $p = \mathrm{Id}_E$.

b) Montrer que p est surjective si et seulement si $p = \mathrm{Id}_E$.

4. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer l'égalité $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Exercice 2 – Calculs dans un groupe

On considère un groupe $(G, \cdot\,)$. Son neutre est noté e, l'inverse d'un élément x est noté x^{-1}. La loi du groupe peut être notée par un point $(x \cdot y)$ ou par une absence de symbole (xy).

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Soient a et b deux éléments de G vérifiant $ba = ab^3$ et $b^7 = e$. Démontrer que $b^3a = ab^2$.

2. On note $\varphi : G \to G$ l'application définie par $\forall x \in G,\ \varphi(x) = x^2$. Démontrer que le groupe $(G, \cdot\,)$ est abélien si et seulement si φ est un morphisme de $(G, \cdot\,)$ dans lui même.

3. On appelle *centre* de G l'ensemble $Z(G) = \{\ x \in G \ \mid\ \forall y \in G,\ xy = yx\ \}$. Autrement dit, $Z(G)$ est l'ensemble des x qui commutent avec tous les éléments de G.

a) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $Z(G)$ le groupe $(G, \cdot\,)$ est-il abélien ?

b) Démontrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

c) Soient x et y deux éléments de G tels que $xy \in Z(G)$. Montrer qu'alors x et y commutent.

4. Soit $u \in G$. On définit une nouvelle loi sur G, notée $\star$, par $\forall (x,y) \in G^2,\ x \star y = x \cdot u^{-1} \cdot y$.
Démontrer que $(G,\star)$ est aussi un groupe.

Exercice 3 – Dérivations dans un anneau

Soit $(A, +\,, \cdot\,)$ un anneau (qui n'est pas supposé commutatif).
On note 0 et 1 les éléments neutres respectifs des lois + et $\cdot$.
Le produit de x et y peut être noté $x \cdot y$, ou plus simplement par absence de symbole : xy.

Une application $\delta : A \to A$ est appelée une *dérivation* sur A si on a les deux propriétés :

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall (x,y) \in A^2, \quad \delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) \\ (2) & \forall (x,y) \in A^2, \quad \delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y \end{array}$$

Partie A - Crochet de Lie et exemple de dérivation

Pour $a,\ b \in A$, on pose $[a,b] = ab - ba$.

1. Que vaut $[a,b]$ lorsque a et b commutent ?

2. On revient au cas général et on se donne a, b et c dans A.

a) Donner une relation liant $[a,b]$ et $[b,a]$.

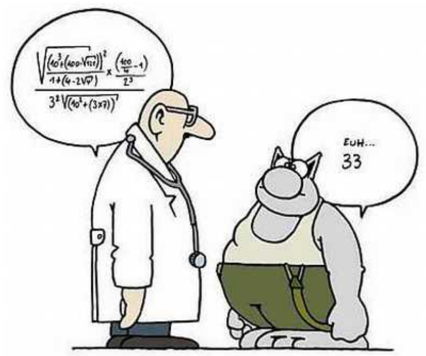
b) Établir que $[a,b+c] = [a,b] + [a,c]$.

c) Démontrer que $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$.
(Cette relation est connue sous le nom d'identité de Jacobi.)

3. Pour $a \in A$, on considère l'application $d_a : A \to A$ définie par $d_a(x) = ax - xa$ pour tout $x \in A$.
Montrer que d_a est une dérivation sur A.

Partie B - Propriétés des dérivations

Soit δ une dérivation quelconque sur A.



4. En exploitant les relations (1) et (2), calculer $\delta(0)$ et $\delta(1)$.

5. Soit x un élément de l'anneau A.

a) Exprimer $\delta(-x)$ en fonction de $\delta(x)$.

b) On suppose que x est inversible.
Exprimer $\delta(x^{-1})$ en fonction de $\delta(x)$ et de x^{-1}.

6. On se donne un entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soient x_1, x_2, ..., x_n des éléments de A.
Exprimer $\delta(x_1 x_2 \dots x_n)$ en fonction des x_k et des $\delta(x_k)$.

b) Pour $x \in A$, exprimer $\delta(x^n)$.
Que devient cette formule si x et $\delta(x)$ commutent ?

7. Soit $C_\delta = \{x \in A \mid \delta(x) = 0\}$.

a) Montrer que C_δ contient les deux neutres 0 et 1 et est stable par somme, par produit et par passage à l'opposé.
(On dit que C_δ est un sous-anneau de $(A, +, \cdot)$.)

b) Montrer que si $(A, +, \cdot)$ est un corps, alors C_δ est aussi stable par passage à l'inverse, c'est-à-dire qu'il contient x^{-1} pour tout $x \in C_\delta \setminus \{0\}$.
(On dit alors que C_δ est un sous-corps de $(A, +, \cdot)$.)

Partie C - Manipulation de dérivations

8. Dans cette question, δ_1 et δ_2 désignent deux dérivations sur A.

a) Est-ce que l'application $\delta_1 + \delta_2$ (qui à $x \in A$ associe $\delta_1(x) + \delta_2(x)$) est une dérivation ?

b) Est-ce que l'application $\delta_1 \circ \delta_2$ est en général une dérivation ?

c) On note $[\delta_1,\delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$.
Montrer que $[\delta_1,\delta_2]$ est une dérivation sur A.

9. Soit δ une dérivation sur A et a, b deux éléments de A.

a) Montrer que $[\delta,d_a] = d_{\delta(a)}$.

b) Montrer que $[d_a,d_b] = d_{[a,b]}$.

Exercice 4 – Théorème de Cantor-Bernstein

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :
▷ *Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.*

Partie A - Lemme : Un résultat de point fixe

Soient E un ensemble et $h : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante au sens de l'inclusion, c'est-à-dire vérifiant $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow h(A) \subset h(B)$.
On veut démontrer que h admet au moins un point fixe, c'est-à-dire un $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $h(X) = X$.
On pose $H_1 = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid h(X) \subset X\}$ et $H_2 = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \subset h(X)\}$.

1. Montrer que H_1 et H_2 sont des ensembles non vides.

2. On pose $V = \displaystyle\bigcap_{X \in H_1} X$. Montrer que $h(V) = V$.

3. On pose $W = \displaystyle\bigcup_{X \in H_2} X$. Montrer que $h(W) = W$.

4. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $h(X) = X$. Montrer que $V \subset X \subset W$.

Autrement dit on a montré que h a au moins un point fixe, et que V et W sont les minimum et maximum des points fixes de h, au sens de l'inclusion.

Partie B - Démonstration du théorème

Dans cette partie, on se donne deux ensembles E et F .
On suppose qu'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$.

5. On définit l'application $h : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ par $h(X) = E \setminus g(F \setminus f(X)) = \overline{g\left(\overline{f(X)}\right)}$ pour toute partie $X \subset E$.
Montrer que h est une application croissante au sens de l'inclusion.

6. D'après la partie **A**, h admet un point fixe qu'on notera M.
Montrer que $g(F \setminus f(M)) = E \setminus M$, égalité qu'on peut aussi noter $g\left(\overline{f(M)}\right) = \overline{M}$.
En déduire que tout élément de $\overline{M}$ a un unique antécédent par g.

7. On définit l'application $\varphi : E \to F$ par $\varphi(x) = f(x)$ si $x \in M$, et $\varphi(x)$ est l'antécédent de x par g si $x \in \overline{M}$. Montrer que φ est une bijection de E dans F et conclure.

Partie C - Quelques applications du théorème de Cantor-Bernstein

8. Donner une injection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$, puis une injection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
En déduire que $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+$ sont équipotents.
(On donnera si c'est possible des injections simples et on ne s'appesantira pas sur les preuves d'injectivité. Même consigne pour les questions suivantes.)

9. En utilisant à nouveau le théorème de Cantor-Bernstein, montrer que $[0;1]$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

10. Montrer de même que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

11. On note $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.