Devoir surveillé n° 4

Samedi 8 décembre

Durée : 4 heures. La calculatrice est interdite.

*Soignez la présentation et la rédaction. Pensez à encadrer/souligner les résultats, à numéroter les pages, à tracer une marge si vous utilisez des feuilles sans marge, et tout cela **avant** la fin de l'épreuve.*

Le premier exercice contient des questions d'application du cours, les deux suivants étudient deux suites réelles. L'exercice 4 démontre un théorème d'arithmétique remarquable.

Exercice 1 – Divers

Les questions sont indépendantes.

1. On tire simultanément et sans remise 6 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement une paire (deux cartes de même hauteur) et un brelan (trois cartes de même hauteur) ? (On ne demande pas de calculer numériquement le résultat.)

2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMME ? (On ne demande pas de calculer numériquement le résultat.)

3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

4. Donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\left(\ln\cos\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$.

Exercice 2 – Une étude de suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la fonction f_n et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique solution réelle à l'équation $f_n(x) = 0$.

On appellera u_n cette solution ; on a ainsi défini une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0; 1]$.

3. Pour $n > 1$, simplifier l'expression $f_n(u_{n-1}) - f_{n-1}(u_{n-1})$.

En déduire le signe de $f_n(u_{n-1})$ puis la monotonie de (u_n).

4. Montrer que (u_n) converge puis déterminer sa limite.

5. En utilisant l'équation vérifiée par u_n, donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 – Une suite récurrente

On se donne un réel a positif ou nul et on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$u_1 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif a, que l'on précisera, pour lequel la suite (u_n) est constante.

2. Montrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite est 0.

3. Montrer que si $u_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout entier naturel non nul n, alors (u_n) est croissante.
Dans ce cas, préciser sa limite.

4. On suppose dans cette question qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $u_k < \sqrt{k}$.

a) Montrer que $u_n < \sqrt{n}$ pour tout $n \geqslant k$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

c) Déterminer la limite de (u_n).

5. On suppose à partir de cette question et jusqu'à la fin de l'exercice que $a > 0$.

a) Montrer que tous les u_n sont strictement positifs, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer l'égalité suivante, valable pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln u_n = 2^{n-1}\ln a \ - 2^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$$

On pose désormais $w_n = 2^{-n-1}\ln(n+1)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k$.

6. ***a)*** Montrer que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $v_n = \dfrac{1}{2}v_{n-1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

En déduire $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \ - w_n$.

c) En remarquant que $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \ln 2$ pour $k \geqslant 1$, montrer l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2}\ln 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln 2$$

d) Montrer enfin que la suite (v_n) converge et que sa limite, qu'on notera W, vérifie l'encadrement $\dfrac{\ln 2}{2} \leqslant W \leqslant \ln 2$.

7. ***a)*** Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement s'il existe un $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si $a < e^{W/2}$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $a \geqslant e^{W/2}$.

8. Montrer que si $a < \sqrt[4]{2}$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Montrer que si $a \geqslant \sqrt{2}$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 – Postulat de Bertrand

On s'intéresse dans cet exercice au *postulat de Bertrand*[1] :

Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe au moins un nombre
premier strictement compris entre n et $2n$.

On va démontrer que cette propriété est vraie à partir d'un certain rang (On pourrait démontrer qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 2$ avec le même type de raisonnement, mais il faudrait raffiner un peu).

On rappelle quelques notations, et on en introduit quelques autres :

— Si p est un nombre premier et n un entier strictement positif, $v_p(n)$ désigne la valuation p-adique de n. On a $p \mid n$ si et seulement si $v_p(n) \geqslant 1$, et $v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n')$ pour tous entiers n, $n' > 0$.
— n désignera un entier supérieur ou égal à 3.
— $\pi(n)$ désigne le nombre de nombres premiers compris au sens large entre 1 et n.
— P_n est le produit des nombres premiers compris au sens large entre 1 et n.
— R_n désigne le produit des nombres premiers compris au sens large entre $n+1$ et $2n$.

Par exemple on a $\pi(7) = 4$ et $P_7 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, et on peut remarquer que $P_n R_n = P_{2n}$.

Une grande partie de la preuve consiste à élaborer divers estimations et encadrements. Les questions qui demandent un argument spécifiquement arithmétique sont les questions ***10*** à ***13***.

Partie A - Établissement d'inégalités utiles

Les différentes questions de cette partie sont indépendantes ; les résultats peuvent être utilisés dans les parties suivantes.

1. En considérant $(1+1)^{2n+1}$, démontrer que $\binom{2n+1}{n} \leqslant 4^n$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$ puis donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la partie fractionnaire $x - \lfloor x \rfloor$ du réel x pour que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$.

3. Pour $n > 1$, on pose $T_n = 4^{n/3}\sqrt{n}\,(2n)^{-\sqrt{n/2}}$.
Écrire un équivalent de $\ln T_n$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire la limite de la suite (T_n).

4. Discuter selon l'entier n du signe de $\dfrac{2}{3}n - \sqrt{2n}$.

5. ***a)*** Donner le réel a_n qui vérifie $\binom{2n+2}{n+1} = a_n \binom{2n}{n}$.

b) Démontrer que $\sqrt{1-x} \leqslant 1 - \dfrac{x}{2}$ pour tout réel $x \leqslant 1$.

c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \binom{2n}{n} > \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

1. Énoncé par Joseph Bertrand en 1845, il a été démontré par Pafnouti Tchebychev en 1850 (et devrait donc être appelé théorème de Tchebychev, mais « postulat de Bertrand » reste en usage). La preuve simplifiée présentée dans cet exercice a été découverte par Paul Erdös en 1932 (il avait alors 19 ans).

Partie B - Diviseurs premiers de $\displaystyle\binom{2n}{n}$

On rappelle et on admet la formule suivante, que nous avons démontrée en exercice : pour tout entier n et tout nombre premier p, on a

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

6. Montrer que $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ dès que $k > \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$.

Dans la suite, le nombre $\left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$ sera noté $V_p(n)$, et on a donc $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{V_p(n)} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

7. Montrer que $V_p(2n) - V_p(n) \in \{0,1\}$. Ce nombre sera noté $\varepsilon_p(n)$.

8. Montrer que $v_p\left(\dbinom{2n}{n}\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{V_p(n)} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right) + \varepsilon_p(n) \leqslant V_p(2n)$.

9. Montrer successivement que

$$p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leqslant 2n$$

$$\sqrt{2n} \leqslant p \ \Rightarrow\ v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant 1$$

$$\frac{2}{3}n < p \leqslant n \ \Rightarrow\ v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$$

Partie C - Conclusion

10. ***a)*** Montrer que tout nombre premier dans $[\![n+2;2(n+1)]\!]$ divise $\dbinom{2n+1}{n}$.

En déduire que le produit des premiers dans $[\![n+2;2(n+1)]\!]$ est majoré par 4^n.

b) Montrer par récurrence forte en distinguant selon la parité de n que $P_n \leqslant 4^n$ pour $n \geqslant 3$.

11. Montrer que R_n divise $\dbinom{2n}{n}$. On note Q_n l'entier naturel tel que $\dbinom{2n}{n} = Q_n R_n$.

12. Montrer que pour $n \geqslant 5$, tous les diviseurs premiers de Q_n sont inférieurs ou égaux à $\dfrac{2}{3}n$.

En déduire que $Q_n \leqslant (2n)^{\pi(\sqrt{2n})} 4^{2n/3}$.

13. Donner la valeur de $\pi(14)$. Pour $n \geqslant 17$, combien y a-t-il d'entiers impairs dans $[\![17;n]\!]$?

En déduire que $\pi(n) \leqslant \dfrac{n}{2} - 1$ pour $n \geqslant 14$.

14. Montrer que $R_n \geqslant 4^{n/3}\sqrt{n}(2n)^{-\sqrt{n/2}}$ à partir d'un certain rang et conclure.