Devoir surveillé n° 5

Samedi 12 janvier

Exercice - Équivalents et limites

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\cos\sqrt{x}-1}$.

2. Montrer que $\ln(2^n - n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln 2$.

Problème – À propos du théorème de Charkovski [1]

Préliminaire - L'ordre de Charkovski

On définit sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ une relation $\lhd$ de la façon suivante.

Soient n et m deux entiers strictement positifs. Ils s'écrivent de façon unique $n = u2^p$ et $m = v2^q$, où u et v sont des entiers impairs et p et q des entiers.

- Si $u = v = 1$ (c'est-à-dire si n et m sont deux puissances de 2), alors $n \lhd m$ si et seulement si $n \geqslant m$.
- Si $u \neq 1$ et $v = 1$ (c'est-à-dire si m est une puissance de 2 mais pas n), alors $n \lhd m$.
- Si $u \neq 1$ et $v \neq 1$ alors $n \lhd m$ si et seulement si $p < q$ ou $(p = q$ et $u \leqslant v)$.

On admet que $\lhd$ ainsi définie est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ (une preuve formelle serait fastidieuse).

Plus concrètement, $\lhd$ ordonne les entiers strictement positifs de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 3 & \lhd & 5 & \lhd & 7 & \lhd & 9 & \lhd & 11 & \lhd & 13 & \lhd & \dots \\
\lhd & 6 & \lhd & 10 & \lhd & 14 & \lhd & 18 & \lhd & 22 & \lhd & 26 & \lhd & \dots \\
\lhd & 12 & \lhd & 20 & \lhd & 28 & \lhd & 36 & \lhd & 44 & \lhd & 52 & \lhd & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & \dots & \lhd & 32 & \lhd & 16 & \lhd & 8 & \lhd & 4 & \lhd & 2 & \lhd & 1
\end{array}$$

1. Sans démonstration, pour la relation $\lhd$:

a) Comparer les entiers 40 et 108. Puis comparer les entiers 31 et 32.

b) Quel est le plus petit entier strictement supérieur à 31 (s'il existe) ?
Quel est le plus grand entier strictement inférieur à 108 (s'il existe) ?

c) Dire pour chacune des parties suivantes si elle admet un minimum, un maximum, une borne supérieure, une borne inférieure (en les précisant le cas échéant) :

— $\mathbb{N}^*$

— $2\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers pairs

— $2\mathbb{N}+1$, l'ensemble des entiers impairs

— $\mathbb{P}$, l'ensemble des nombres premiers

1. D'après Oleksandr Charkovski (Mathématicien ukrainien, 1936 –).

Dans la suite du problème, on note I le segment $[0;1]$ et on considère une fonction $f : I \to I$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la fonction $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (f itérée n fois).

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Un point $x \in I$ est dit *n-périodique* pour f si $f^n(x) = x$ et si $f^p(x) \neq x$ pour tout $p < n$; l'entier n s'appelle la période de x. Un point $x \in I$ est *périodique* s'il est n-périodique pour au moins un entier $n \geqslant 1$.

Par exemple, un point fixe de f est un point 1-périodique.

En 1964 a été démontré le théorème suivant :

Théorème de Charkovski : Soit n un entier strictement positif. S'il existe dans I un point n-périodique pour f, alors il existe un point m-périodique pour tout m tel que $n \lhd m$.

En particulier, si f a un point 3-périodique alors elle a des points périodiques de toute période.

Les parties suivantes du problème sont indépendantes et abordent différents thèmes en rapport avec le théorème de Charkovski.

— Dans la partie A, on examine quelques exemples.

— Dans la partie B, on montre qu'il existe une fonction qui a un point 5-périodique mais pas de point 3-périodique.

— Dans la partie C, on construit à partir d'une fonction f une fonction F qui a des points périodiques de périodes doubles de celles de f.

— Enfin, dans la partie D, on démontre une partie du théorème de Charkovski.

Partie A - Période 1, période 3

2. Soit $f : I \to I$ continue quelconque.

- ***a)*** Montrer que f a au moins un point fixe dans I.
- ***b)*** Donner un exemple de fonction f qui a un unique point fixe et qui n'a aucun point n-périodique avec $n > 1$.

3. On définit $f : I \to I$ par $f(x) = 2x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ et $f(x) = 2(1-x)$ si $1/2 < x \leqslant 1$.

- ***a)*** Démontrer que f est continue sur I et tracer son graphe.
- ***b)*** Montrer que f admet un point 3-périodique que l'on précisera.
  On pourra le rechercher dans l'intervalle $[1/8; 1/4]$.
- ***c)*** Soit $x \in I$ le réel qui a l'écriture en base 2 périodique suivante :
  $$x = \overline{0,00110\ 00110\ 00110\ 00110\ \ldots}^2$$
  Donner l'écriture en base 2 de $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$ et $f^5(x)$. Qu'en déduit-on ?
- ***d)*** En adaptant le procédé précédent, construire un point 4-périodique pour f.
  On pourra donner son écriture en base 2.

Partie B - La période 5 n'implique pas la période 3 : « optimalité » du théorème

On considère dans cette partie la fonction f définie sur l'intervalle [0,1] par :

$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{2}, \quad f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1, \quad f\left(\dfrac{2}{4}\right) = \dfrac{3}{4}, \quad f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{4}, \quad f(1) = 0 \\[2ex] f \text{ est affine sur } \left[\dfrac{k}{4}; \dfrac{k+1}{4}\right] \text{ pour tout } k \in [\![0,3]\!] \end{cases}$$

4. Dresser rapidement le tableau de variations de f et tracer son graphe.

5. Montrer que 0 est un point périodique et préciser sa période.

6. Donner les images respectives des intervalles $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$, $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{3}{4};1\right]$ par $f^3 = f\circ f\circ f$.
La fonction f admet-elle un point 3-périodique dans l'un de ces intervalles ?

7. Montrer que f^3 est strictement monotone sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right]$. En déduire que f^3 admet un unique point fixe sur [0,1].

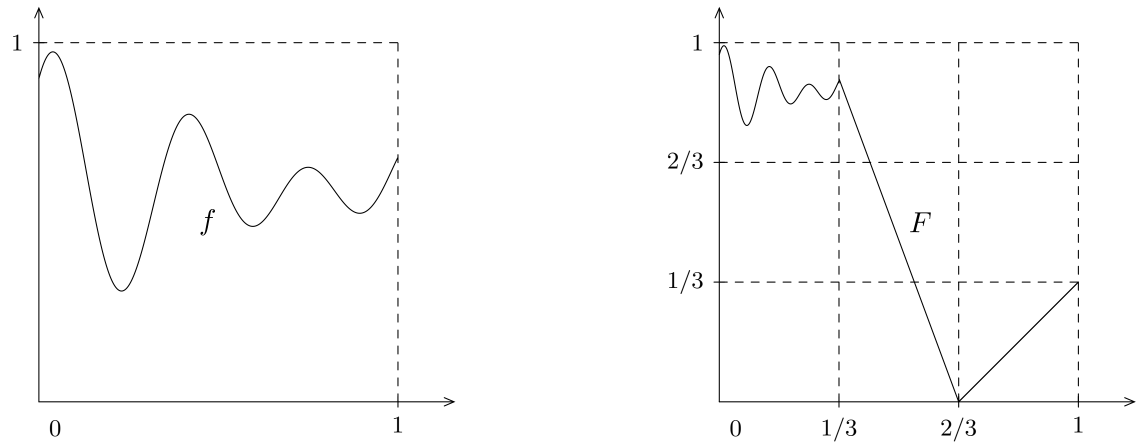
8. Montrer enfin que f n'admet pas de point 3-périodique.

Partie C - Doublement de période.

Soit $f : I \to I$ continue. On appelle « double de f » la fonction $F : I \to I$ telle que

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{f(3x)}{3} \text{ si } x \in \left[0,\dfrac{1}{3}\right]. \\ F\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0 \text{ et } F(1) = \dfrac{1}{3}. \\ F \text{ est continue sur } [0;1] \text{ et affine sur } \left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right] \text{ et sur } \left[\dfrac{2}{3};1\right]. \end{cases}$$

Concrètement, on divise le segment [0,1] sur l'axe des abscisses en trois tiers, on fait la même chose avec le segment sur l'axe des ordonnées, on compresse le graphe de la fonction f par un facteur $1/3$ et on le met dans le coin supérieur gauche. Enfin, on relie les points avec des fonctions affines, comme sur le graphe suivant.



9. Donner l'expression de $F(x)$ pour $x \in \left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ puis $x \in \left[\dfrac{2}{3},1\right]$.

10. Montrer que $F\left(\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\right) \subset \left[\dfrac{2}{3},1\right]$ et que $F\left(\left[\dfrac{2}{3},1\right]\right) = \left[0,\dfrac{1}{3}\right]$.

11. Montrer que F admet un unique point fixe.
On le notera p dans les questions suivantes.

12. Soit $x \in \left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ avec $x \neq p$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ et on veut aboutir à une absurdité.

- ***a)*** Soit a le coefficient directeur de F sur le segment $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ (on rappelle que F est affine sur ce segment). Montrer que $a \leqslant -2$.
- ***b)*** Montrer que pour tout n, $|u_{n+1} - p| \geqslant 2\,|u_n - p|$.
- ***c)*** En déduire que $|u_n - p| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et aboutir à une absurdité.

d) Montrer que F n'a aucun point périodique dans le segment $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$, mis à part son point fixe.

13. Soit x un réel dans $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

a) Donner la valeur de $F(x)$, $F^2(x)$, $F^3(x)$ et $F^4(x)$.

b) Donner par récurrence sur k la valeur de $F^{2k}(x)$.

c) En déduire que si x est un point périodique de f de période n, alors $x/3$ est un point périodique de F de période $2n$.

14. Soit $x \in [0;1]$ un point périodique de F qui n'est pas un point fixe.

a) Montrer que la période de x est un entier pair. On la note $2q$.

b) Montrer que l'un des deux nombres x et $F(x)$ appartient à l'intervalle $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

On suppose dans la suite que $x \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$.

c) En utilisant la question ***13b***, montrer que $3x$ est q-périodique pour f.

On démontrerait de la même façon (et donc on l'admettra) que si $F(x) \in \left[0,\frac{1}{3}\right]$ alors $3F(x)$ est périodique pour f de période q.

15. Montrer finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet un point périodique de période n si et seulement si F admet un point périodique de période $2n$.

16. *Application :* En déduire qu'il existe une fonction admettant un point 10-périodique mais aucun point 6-périodique.

Partie D - Si f a un point 3-périodique, alors f a un point n-périodique pour tout n

17. Soit J un segment non vide inclus dans I. Soit K un segment non vide inclus dans $f(J)$. On se propose de montrer qu'il existe un segment L inclus dans J tel que $K = f(L)$.

a) On suppose K réduit à un point. Montrer l'existence de L.

b) On suppose désormais $K = [\alpha,\beta]$ avec $\alpha < \beta$. Montrer l'existence de a,b dans I tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. On supposera dans la suite que $a < b$. (On aurait un raisonnement analogue si $b < a$.)

c) Soit $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) = \beta\}$. Montrer que A a une borne inférieure puis que cette borne inférieure est un minimum. On notera $v = \min A$.

d) Soit $B = \{x \in [a,v] \mid f(x) = \alpha\}$. Montrer de même l'existence de $u = \max B$.
En déduire l'existence de L.

18. Soit K un segment non vide inclus dans I tel que $K \subset f(K)$.
Montrer que f admet un point fixe dans K.

19. Lorsque I_0 et I_1 sont deux segments inclus dans I, on dit que I_0 f*-recouvre* I_1, et on note $I_0 \to I_1$, lorsque $f(I_0) \supset I_1$. On note $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_n$ si $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $I_k \to I_{k+1}$.

On suppose qu'il existe $n+1$ segments non vides $I_0, I_1, \ldots, I_n$ inclus dans I tels qu'on ait $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_n$. Montrer qu'il existe une famille $(J_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ de n segments non vides tels que $J_k \subset I_k$ et $f(J_k) = J_{k+1}$ pour tout entier $k \in [\![0;n-1]\!]$ et $f(J_{n-1}) = I_n$.
Si $x_0 \in J_0$, que peut-on dire des $f^k(x_0)$ où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

20. On suppose qu'il existe un point 3-périodique x. On introduit les réels $x_0 = \min\{x,f(x),f^2(x)\}$, $x_1 = f(x_0)$ et $x_2 = f(x_1)$. À l'aide de x_0, x_1, x_2, déterminer deux segments S_1 et S_2 inclus dans I ayant un seul point commun tels que $S_1 \to S_1$ et $S_1 \to S_2 \to S_1$. En déduire qu'il existe un point fixe et un point 2-périodique. (On pourra distinguer $x_1 < x_2$ et $x_2 < x_1$.)

21. On suppose toujours que x est un point 3-périodique. Montrer qu'il existe un point n-périodique pour tout entier $n \geqslant 1$. (On cherchera une suite de la forme $S_1 \to S_2 \to S_2 \to \cdots \to S_2 \to S_1$.)