# Devoir surveillé n° 6

Mercredi 6 février

## Exercice 1 - Espaces supplémentaires

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$.
On suppose que $f^2 = 5f - 6\,\mathrm{Id}_E$.

***1.*** Montrer qu'on a $E = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$.

***2.*** On suppose que $E$ est de dimension finie et on note $n = \dim E$. Montrer qu'il existe un entier $p$ et une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $E$ telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1;p]\!], & f(e_k) = 2e_k \\ \forall k \in [\![p+1;n]\!], & f(e_k) = 3e_k \end{cases}$$

## Exercice 2 - Calcul de puissance

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice 3.

***1.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $(\mathrm{Id}_E + u)^n$.

***2.*** Montrer que $\mathrm{Id}_E + u$ est inversible et calculer $(\mathrm{Id}_E + u)^{-1}$.

## Exercice 3 - Image et noyau

On considère l'application $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ qui à $(x,y,z,t)$ associe $(x+7y+5z+4t\,, 2x+y-3z-5t\,, y+z+t)$.
On admet que $g$ est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

***1.*** Déterminer une base de $\ker g$ et en déduire le rang de $g$.

***2.*** Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, g$.

***3.*** On note $v \in \mathbb{R}^3$ le vecteur $v = (0,0,1)$. Montrer que $\mathrm{Im}\, g \oplus \mathrm{Vect}\, v = \mathbb{R}^3$.

***4.*** On appelle $p$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}\, v$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, g$.
Déterminer l'image par $p$ d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

# Problème - Noyaux itérés et classification des endomorphismes nilpotents

Dans ce problème, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $n = \dim E$.

## Partie A - Essoufflement de la suite des noyaux itérés

On fixe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \ker(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.
On note aussi $n_k = \dim N_k$ et $i_k = \dim I_k$ les dimensions des espaces $N_k$ et $I_k$.

***1.*** Démontrer que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante au sens de l'inclusion.
Que dire de la monotonie des suites $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ?

***2.*** En utilisant des arguments de dimension, montrer que :
— La suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
— La suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du même rang que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Dans la suite, on notera $r$ le rang commun à partir duquel les deux suites stationnent (on a $N_{r-1} \subsetneq N_r = N_{r+1}$ et $I_{r-1} \supsetneq I_r = I_{r+1}$).

***3.*** Montrer que $I_r \oplus N_r = E$.

***4.*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\delta_k = i_k - i_{k+1}$.

***a)*** Montrer qu'on a aussi $\delta_k = n_{k+1} - n_k$.

***b)*** On fixe $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel $S$ tel que $I_k = I_{k+1} \oplus S$ et déterminer $\dim S$.

***c)*** Établir que $I_{k+1} = I_{k+2} + u(S)$.

***d)*** En déduire que $\delta_{k+1} \leqslant \delta_k$ : la suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
*(Les sauts de dimension étant de plus en plus petits, on dit que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s'essoufflent.)*

## Partie B - Endomorphismes conjugués

On définit sur $\mathcal{L}(E)$ une relation de la façon suivante : on dit que deux endomorphismes $u$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ sont conjugués, et on note $u \sim v$, s'il existe un automorphisme $\varphi \in GL(E)$ tel que $u = \varphi \circ v \circ \varphi^{-1}$.

***5.*** Démontrer que la relation $\sim$ de conjugaison est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}(E)$.

***6.*** Une classe d'équivalence pour la relation de conjugaison s'appelle une classe de conjugaison.
Quelle est la classe de conjugaison de $\mathrm{Id}_E$ ? et de l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$ ?

***7.*** Montrer que deux endomorphismes $u$ et $v$ conjugués ont le même rang.

***8.*** Montrer que si $u \sim v$, alors $u^k \sim v^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

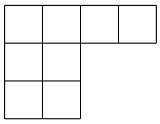
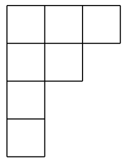
***9.*** Montrer que si $u$ est nilpotent, alors tout endomorphisme $v$ conjugué à $u$ est également nilpotent, avec le même indice de nilpotence que $u$.

## Partie C - Diagrammes de Young d'endomorphismes nilpotents

***10.*** *(Parenthèse combinatoire)*

On appelle diagramme de Young à $n$ cases toute liste $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ d'entiers strictement positifs, décroissants et de somme total $n$. Un diagramme de Young peut être représenté par un tableau avec $a_0$ cases sur la première ligne, $a_1$ cases sur la deuxième, ..., $a_{p-1}$ cases sur la dernière.

On a représenté ci-dessous à gauche (4,2,2), qui est un diagramme de Young à 8 cases, et à droite (3,2,1,1) qui est un diagramme de Young à 7 cases.

Combien existe-t-il de diagrammes de Young à 6 cases ? On peut répondre à cette question en faisant de petits dessins.

***11.*** On reprend la situation et les notations de la partie $A$, et on suppose maintenant et jusqu'à la fin du problème que $u$ est nilpotent.

Que valent $I_0$ et $I_r$ ?

Montrer que $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{r-1})$ est un diagramme de Young à $n$ cases (on rappelle que $n = \dim E$).

Que dire de l'entier $r$ ?

***12.*** Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ un diagramme de Young à $n$ cases. Montrer qu'il existe un endomorphisme nilpotent $u$ dont le diagramme de Young $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{r-1})$ est égal à $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$.

(On pourra introduire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $E$ et construire $u$ en donnant les images des vecteurs de cette base.)

***13.*** Soit $v$ un deuxième endomorphisme nilpotent. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$N'_k = \ker(v^k), \quad I'_k = \operatorname{Im}(v^k), \quad n'_k = \dim N'_k, \quad i'_k = \dim I'_k, \quad \delta'_k = i'_k - i_{k+1} = n'_{k+1} - n'_k$$

On suppose que $u$ et $v$ sont conjugués.

Montrer qu'alors leurs diagrammes de Young $(\delta_0, \ldots, \delta_{r-1})$ et $(\delta'_0, \ldots, \delta'_{r'-1})$ sont égaux.

*On admet la réciproque : si deux endomorphismes nilpotents ont le même diagramme de Young, alors ils sont conjugués.*

***14.*** Combien existe-t-il de classes d'équivalence d'endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^6$ ?