Devoir surveillé n° 7

Samedi 23 mars

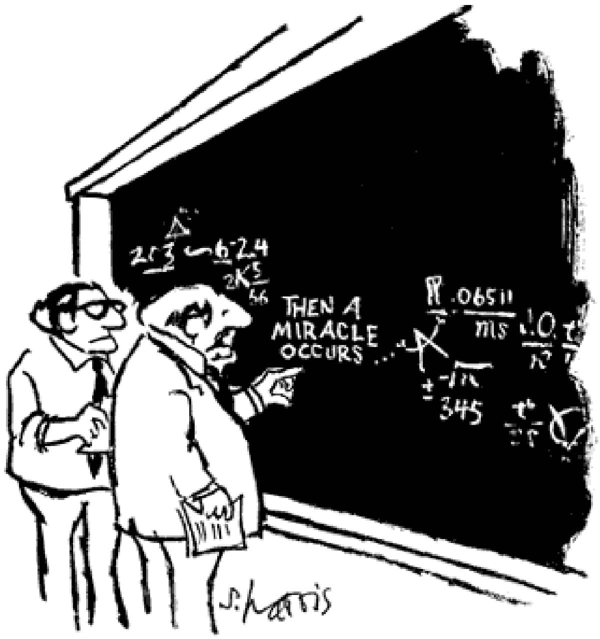
Exercice 1 - Un peu de calcul

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\cos x}$, puis un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

2. À l'aide du changement de variable $t = \sin\theta$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos^3\theta}{4+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

3. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.



"I think you should be more explicit here in step two."

Exercice 2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Le but de cet exercice est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, résultat qu'on peut noter plus simplement : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On définit pour cela deux fonctions f, $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout réel } x.$$

1. **Dérivée de f.**
Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Établir qu'on a pour tout réel x : $\quad f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

2. **Dérivée de g.**
On fixe dans cette question un réel x. On pose pour tout réel h non nul :

$$\Delta(h) = \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + (2x+h)\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

a) Établir l'égalité :

$$\Delta(h) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \times \left(\frac{e^{(-2hx-h^2)(1+t^2)} - 1 - (-2hx-h^2)(1+t^2)}{h}\right)\mathrm{d}t$$

b) Montrer qu'on a pour tout $u\in\mathbb{R}$ la majoration $|e^u - 1 - u| \leqslant e^{|u|}\times\frac{u^2}{2}$.
On peut commencer par écrire une formule de Taylor pour exp *sur l'intervalle* $[0;u]$.

c) En déduire que $|\Delta(h)| \leqslant g(x)\times e^{2|2hx+h^2|}\times 2\times|2x+h|\times|2hx+h^2|$.

d) Montrer finalement que g est dérivable en x et qu'on a :

$$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

3. Montrer que $f+g$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer les valeurs $f(0)$ et $g(0)$.

5. **Limite de g en $+\infty$.**

a) Soit x un réel positif. Établir : $\forall t\in[0;1]\,,\ 0 \leqslant \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant e^{-x^2}$.

b) En déduire que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. Donner finalement la limite de f en $+\infty$ et conclure.

Problème - Étude d'une transformation fonctionnelle

On note $E = \mathcal{C}^0(\,]-1;+\infty[\,)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $I = \,]-1;+\infty[$, continues et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Étant donné un élément $f \in E$, on appelle $T(f)$ l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I, \quad T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Partie A - Quelques exemples

1. Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer $T(f)$ pour l'application :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t+1) \end{array}$$

3. Déterminer $T(f)$ pour l'application :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{array}$$

et donner un développement limité à l'ordre 2 de $T(f)$ en $+\infty$.

4. Pour tout entier n strictement positif, on définit l'application $f_n : t \mapsto t^n$.
Soit $x \in I$. Trouver une relation entre $T(f_{n+1})(x)$ et $T(f_n)(x)$.
En déduire une expression de $T(f_n)(x)$ à l'aide d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.

5. Vérifier que T est un endomorphisme de E et déterminer $\ker T$ et $\operatorname{Im} T$.

Partie B - Étude d'un cas particulier

Cette partie est consacrée à l'étude de $T(f)$ lorsque f est définie par $f(t) = e^{-t}$ pour tout $t \in I$.
Ainsi, $\forall x \in I$, $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,\mathrm{d}t$. (On ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

6. Déterminer le sens de variation de la fonction $T(f)$.

7. Trouver par primitivation le développement limité de $T(f)$ à l'ordre 3 en 0.
En déduire l'allure locale de la courbe représentative de $T(f)$ au voisinage de 0. (C'est-à-dire : la courbe admet-elle une tangente en 0 ? Si oui, que dire de la position relative de la courbe et de sa tangente ?)

8. Montrer que $T(f)$ est majorée, puis que $T(f)(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
On ne cherchera pas à calculer cette limite.

9. Déterminer la limite de $T(f)(x)$ lorsque x tend vers -1^+.
On pourra pour cela établir une minoration ou une majoration de $T(f)(x)$.

10. Donner l'allure de la représentation graphique de $T(f)$ en faisant apparaître les résultats des questions précédentes.

Partie C - Comportement en $+\infty$

Dans cette partie, on fixe un élément $f \in E$ et on suppose que f admet en $+\infty$ une limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. On souhaite étudier le comportement de la fonction $T(f)$ en $+\infty$.

11. On suppose dans cette question que $\lambda = 0$.

a) Démontrer que la fonction f est bornée sur $[0;+\infty[$.
On notera dans la suite $M = \sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f(t)|$.

b) Pour $x \geqslant 1$, on pose $\alpha(x) = \sup \left\{ |f(t)| \;\mid\; t \in [\ln(x);x] \right\}$ la borne supérieure de $|f|$ sur l'intervalle $[\ln(x);x]$.
Montrer que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a :

$$|T(f)(x)| \leqslant M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \;+\; \alpha(x) \int_{\ln x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

d) En déduire que $T(f)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$.

12. On suppose dans cette question que $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
On pourra considérer $T(g)$, où g est définie par $g(t) = f(t) - \lambda$ pour tout $t \in I$.

13. On suppose dans cette question que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

14. Dans cette question, on considère la fonction f définie par $f(t) = e^t$ pour $t \in I$.
Ainsi, $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{t+1}\,\mathrm{d}t$. (On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.)
On note, pour $n \geqslant 2$: $\quad F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) En découpant $F_n(x) = \displaystyle\int_0^{x/2} \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{x/2}^{x} \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t$ et en majorant les deux intégrales, montrer que $F_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{e^x}{x^{n-2}}\right)$ pour tout $n \geqslant 2$.

b) En intégrant $F_n(x)$ par parties, montrer que $F_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{e^x}{x^{n-1}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer trois constantes a, b, $c \in \mathbb{R}$ telles qu'on ait, au voisinage de $+\infty$:

$$T(f)(x) = \; a\frac{e^x}{x} \;+\; b\frac{e^x}{x^2} \;+\; c\frac{e^x}{x^3} \;+\; \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$$