Devoir surveillé n° 9

Samedi 18 mai

Exercice 1 - Un calcul de comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Calculer la comatrice de la matrice B suivante :

$$B = \left(\begin{array}{c:c} 0 & 0_{1n} \\ \hdashline 0_{n1} & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Exercice 2 - Formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$ le produit des n premiers entiers impairs.

1. Donner une expression de u_n utilisant des factorielles.

2. En utilisant la formule de Stirling, écrire un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 - Polynôme caractéristique d'une matrice

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $x \in \mathbb{K}$, on note $\chi_M(x) = \det(xI_n - M)$.
On rappelle que l'application $\chi_M : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est polynomiale de degré n.

1. *Exemples.*
Expliciter χ_M sous forme factorisée lorsque :

a) $M = 0_n$ ***b)*** $M = I_n$ ***c)*** $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables.
Montrer qu'alors $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$.

3. À partir de maintenant, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de rang 1. On appelle $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice représentative $B = \operatorname{mat}_{\mathcal{F}} f$ a ses $n-1$ premières colonnes nulles.

b) Expliciter χ_B puis montrer que $\forall x \in \mathbb{K}$, $\chi_A(x) = x^{n-1}(x - \operatorname{tr}(A))$.

Exercice 4 - Produit de Cauchy de deux séries

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries de nombres complexes. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : si les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ est elle aussi absolument convergente et vérifie

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

On utilisera les notations suivantes pour les sommes partielles et les sommes des séries en jeu :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,\quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \text{ et } \quad A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,\quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,\quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

1. Dans cette première question, on traite le cas particulier où $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ sont des séries à termes réels positifs convergentes.

a) Justifier que $C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j$.

b) Justifier que $A_n \times B_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j$ et en déduire que $C_n \leqslant A_n \times B_n$.

c) Conclure que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée puis que la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge.

d) Justifier que $A_n \times B_n \leqslant C_{2n}$ puis conclure que $A \times B = C$.

2. Dans cette question, on traite le cas général où $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ sont deux séries à termes complexes.

On suppose que ces deux séries convergent absolument. On notera :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A'_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,\quad B'_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|,\quad C'_n = \sum_{k=0}^{n} d_k \text{ avec } d_k = \sum_{i=0}^{k} |a_i| \times |b_{k-i}|$$

a) Prouver que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ converge absolument.

b) Montrer que $|A_n B_n - C_n| \leqslant A'_n B'_n - C'_n$.

c) Conclure que $A \times B = C$.

3. *Exemple et contre-exemple.*

a) Soient $x,\ y \in \mathbb{C}$. Dans cette question et la suivante, on pose pour tout n : $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ et $b_n = \dfrac{y^n}{n!}$. Justifier que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ sont absolument convergentes.

b) Calculer et simplifier c_n puis démontrer que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(x+y)^n}{n!}$.

c) On pose maintenant $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente mais pas absolument convergente.

d) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ est grossièrement divergente et que l'hypothèse d'absolue convergence est nécessaire au résultat démontré dans cet exercice.

Problème - Approximation uniforme et polynômes de Bernstein

Dans ce problème, on démontre le théorème d'approximation de Weierstrass qui affirme (informellement) que toute fonction continue sur un segment peut être, en un certain sens, bien approchée par des polynômes.

Partie A - Norme infinie d'une fonction continue sur $[0;1]$.

On note $E = \mathcal{C}^0([0;1])$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in E$. Justifier que $|f|$ admet une borne supérieure.
Dans la suite on notera $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$.

2. Montrer qu'on a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E,\ \|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\ \|f\|_\infty$

3. Démontrer l'inégalité : $\forall f, g \in E,\ \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (dite *inégalité trianguulaire*)

Partie B - Quelques calculs préliminaires.

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$ le polynôme $P_{n,k}$ de la façon suivante :

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

4. Déterminer les polynômes $P_{3,0}$, $P_{3,1}$, $P_{3,2}$ et $P_{3,3}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_{n,k})_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Démontrer les identités suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} P_{n,k} = 1.$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} kP_{n,k} = nX.$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)P_{n,k} = n(n-1)X^2.$

7. Déduire de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} \left(X - \dfrac{k}{n}\right)^2 P_{n,k} = \dfrac{1}{n} X(1-X).$

Partie C - Majoration de $S(x)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0;1]$, on pose $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left|x - \dfrac{k}{n}\right| P_{n,k}(x)$.

8. On note $V = \left\{ k \in [\![0;n]\!],\ \left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ et $S_V(x) = \sum\limits_{k\in V} \left|x - \dfrac{k}{n}\right| P_{n,k}(x)$.

Montrer que $S_V(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $x \in [0;1]$.

9. On note $W = \left\{ k \in [\![0;n]\!],\ \left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ et $S_W(x) = \sum\limits_{k\in W} \left|x - \dfrac{k}{n}\right| P_{n,k}(x)$.

Montrer que $S_W(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$ pour tout $x \in [0;1]$.

10. En déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{5}{4\sqrt{n}}$ pour tout $x \in [0;1]$.

Partie D - Application à l'approximation uniforme.

On fixe une application $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x \in [0;1]$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x)$$

Le but de cette partie est d'étudier $\|B_n(f) - f\|_\infty$, lorsque $f \in E$, sous différentes hypothèses.

11. *Un exemple.* Si $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0;1]$, déterminer $B_n(f)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f) - f\|_\infty$.

12. On revient à une fonction $f \in E$ quelconque. Montrer la relation :

$$\forall x \in [0;1]\,,\ B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P_{n,k}(x)$$

13. On suppose dans cette question seulement que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

- ***a)*** Montrer qu'il existe un $C \in \left]0;+\infty\right[$ pour lequel f est C-lipschitzienne sur $[0;1]$.
- ***b)*** Montrer qu'alors $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{5C}{4\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
  En déduire $\|B_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

14. On ne fait maintenant plus aucune hypothèse sur $f \in E$. On fixe un $\varepsilon > 0$.

- ***a)*** Montrer qu'il existe un $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ pour tout couple $(x,y) \in [0;1]^2$ tel que $|x - y| \leqslant \eta$.
- ***b)*** On note $T = \left\{ k \in [\![0;n]\!]\,, \left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leqslant \eta \right\}$. Montrer $\left| \displaystyle\sum_{k\in T} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P_{n,k}(x) \right| \leqslant \varepsilon$.
- ***c)*** On note $U = \left\{ k \in [\![0;n]\!]\,, \left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \eta \right\}$. Montrer $\left| \displaystyle\sum_{k\in U} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P_{n,k}(x) \right| \leqslant \varepsilon \left(1 + \dfrac{5}{4\eta\sqrt{n}} \right)$.
- ***d)*** En déduire finalement que $\|B_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

15. En conclusion, en utilisant les polynômes de Bernstein, démontrer le résultat suivant :

> **Théorème d'approximation de Weierstrass :**
> Pour toute application continue $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.