Nouvelles Questions de Cours de Spé

1 Sélection de Théorèmes primordiaux

Les théorèmes ci-dessous ont été sélectionnés comme étant les plus centraux : leur connaissance présuppose que les définitions correspondantes sont bien sues et que les savoirs techniques associés sont maîtrisés. De plus, certains sont à référencer à d'autres théorèmes qui les précèdent ou bien qui en découlent : conscience d'une unité de cours avec une logique interne cohérente. Percevoir ces théorèmes comme des énoncés qu'on ne sait restituer que sur demande (donc sans autonomie) n'est qu'une partie de l'apprentissage et ne vaut rien si de plus ces énoncés sont des phrases qu'on apprend par cœur vidées de leur sens .

A ces théorèmes, j'associe un titre qui correspond à des mots clés devant lesquels, on doit automatiquement penser au théorème en question, même s'il arrive parfois (mais pas si souvent) qu'une autre méthode soit plus appropriée à certains exercices.

Certains sont couplés, parce qu'il importe de discerner les contextes qui les valident, d'autant plus qu'ils ont pas mal de choses en commun.

*La présence du symbole * signifie que la connaissance est du niveau approfondissement des concours les plus prestigieux tandis que (*) concerne un niveau d'approfondissement un peu moins poussé. Je ne donne pas la note maximale 5/5 à un élève à l'aise pressenti pour être admissible à un concours comme Pont ou Centrale qui ne connaît pas un minimum de ces approfondissements.*

Le $\overset{\odot}{R}$ signifie qu'il y a un commentaire dans la liste des remarques (après la liste des questions). Commentaires mnémotechniques ou théoriques. Parfois c'est une indication sur la résolution des exercices.

An11 Interversion Limite et intégrale :

Convergence dominée. $\overset{\odot}{R}$

Preuve : dans le cas particulier où on intègre sur un segment et que la convergence est uniforme. Montrer en particulier que l'existence d'une fonction de domination est automatiquement acquise sur un segment par la convergence uniforme.

Définitions associées : convergence simple, convergence uniforme, intégrabilité, absolue convergence, continuité par morceaux sur un intervalle

Savoirs techniques associés : majoration <u>en valeur absolue</u> , intégrabilité

Autres interversions : C^0 *et* $\int$ et $D-\int$, $\sum - \int$

Exercices de base :

a) Calculer $\lim \int_0^{\pi} \sin^n(t)\,dt$

b) Faire de même pour $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{ch^n(t)}\,dt$

c)(*) Justifier la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n$ <u>**et**</u> $\overset{\odot}{R}$ exprimer la somme sous la forme d'une intégrale qu'on ne vous demande pas de calculer. $\overset{\odot}{R}$

d) Montrer que la suite de fonctions $f_n = \left(x \to \frac{1}{n}\exp\left(\frac{-x}{n}\right) \right)$ converge uniformément et que ces fonctions sont intégrables sur $[0\,;\,+\infty[$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n$. Commenter ...

An12 Interversion : Continuité et série :

Continuité de série de fonctions. Version locale du théorème (sur un intervalle).

Preuve : à partir du théorème d'interversion limite-continuité.

Définitions associées : série de fonctions, convergence simple, convergence uniforme, convergence normale, notion locale.

Savoirs techniques associés : majoration <u>en valeur absolue</u> , convergence de série

Autres interversions : $\lim-\sum$ n'est plus au programme, $D-\sum$

Exercices de base :

a) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{artan(nx)}{n(n^2+1)}$ définit une fonction continue.

b) Montrer que $\zeta : \alpha \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ est continue sur $]1\,;+\infty[$

c) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ définit une fonction continue sur $[-1\,;0]$.

d) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ définit une fonction C^0 sur $[0\,;1]$.

e) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+ch\,x}$ définit une fonction continue.

f) Montrer que $\varphi : \alpha \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$

An13 Rayon de convergence :

Lien entre le rayon et la convergence d'une série entière.

Définitions associées : série entière, série de Taylor, définition théorique du rayon (voir **XXVIII**) , convergence de série (voir **A**)

Savoirs techniques associés : développement des fonctions usuelles (voir **B**)

Théorèmes associés : rayon de dérivée et de primitive

Pour la preuve : lemme d'Abel (voir **XXVIII**)

Exercices de base :

a) Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$? de $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)x^n$

b) et celui de $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n!}$?

An14 Équations différentielles scalaires et systèmes différentiels

Théorèmes de Cauchy : linéaire (ordre 1 et 2) $\overset{\odot}{R}$

Les non linéaires sont au programme de modélisation du cours d'informatique mais pas leur théorème de Cauchy qui tient compte du caractère imprévisible de l'intervalle de définition et permet de comprendre le peu de fiabilité à long terme des solutions approchées.

Définitions associées : équation différentielle linéaire, conditions initiales, système différentiel associé à une équation différentielle d'ordre 2 (et espace des phases pour la physique)

Savoirs techniques associés : diagonalisation, résolution dans le cas où on a réussi à se ramener à un système différentiel triangulaire.

Ag11 Caractérisations des endomorphismes diagonalisables

Parmi les critères, ne pas oublier la définition. Deux autres caractérisations : la dimension de la somme (directe) des sous-espaces propres ou bien le lien avec les multiplicités.

Preuves : elles montrent ce qu'il faut faire pour diagonaliser.

Définitions associées : valeur propre, vecteur propre, endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable, somme directe, base adaptée à un (ou plusieurs) sous-espaces, sous-espace propre, sous-espace stable, endomorphisme induit, multiplicité.

Savoirs techniques associés : théorème du rang, calcul pratique de rang, calcul pratique de noyau

Un cas particulier pratique : polynôme caractéristique scindé à racines simples.

Exercices de base :

a) Montrer qu'une projection ou une symétrie est diagonalisable. $\overset{\odot}{R}$ *Ce n'est pas un exercice mais plutôt un exemple fondamental du cours ! Et pourtant vous êtes un certain nombre à ne pas reconnaître les involutions (donc symétries) aux oraux blancs.*

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Faire de même pour $I_n + E_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est un des vecteurs de base de l'espace des matrices *n-n* . *Doit se faire sans calcul.*

c) Montrer sans calcul que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

d) Montrer sans calcul que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ représente une involution. $\overset{\odot}{R}$ *Ce n'est pas sans rapport avec l'exo a)*

e) *En relation avec les systèmes différentiels et un peu de trigonalisation* :

Pour quelles valeurs du paramètre α les solutions de $\begin{cases} x'(t) = (2+\alpha)x(t) - \alpha\, y(t) \\ y'(t) = \alpha\, x(t) + (2-\alpha)y(t) \end{cases}$ sont-elles toute négligeables en $+\infty$ devant $\left(t \to t\, e^{2t} \right)$? *La réponse suppose bien évidemment que vous fassiez le minimum de calculs : pas plus que le polynôme caractéristique.* $\overset{\odot}{R}$ *Je concède l'indication de commencer par répondre à la même question sur le système*
$\begin{cases} u'(t) = 2u(t) + \beta v(t) \\ v'(t) = \qquad\quad 2v(t) \end{cases}$.

f) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & i & j & j^2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donner sans calcul de produit matriciel autre que par des formules la valeur de A^4 .

Ag12 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

A savoir démontrer : trigonalisable entraîne polynôme caractéristique scindé.

Exercices de base :

a) Montrer que $\forall A \in M_2(\mathbb{C})$, $(Tr\, A)^2 = Tr\left(A^2\right) + 2\, det\, A$

b) Montrer que si A est une matrice réelle dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, alors $Tr\left(A^2\right) \geqslant 0$

c) Montrer sans le théorème sur le polynôme scindé que si le polynôme caractéristique est scindé et n'admet que des racines simples, sauf une qui est double, alors il est trigonalisable. $\overset{\odot}{R}$

Rappel : *la démonstration générale n'est pas exigible mais ce cas particulier est très simple.*

P11 Espérance et variance pour une variable aléatoire discrète.

Ne pas oublier les conditions d'existence.

Lien avec la fonction génératrice G_X lorsque X est à valeurs entières positives.
Rappel : la formule $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ n'est pas la définition de la variance.
Définitions associées : écart type, fonction génératrice.

2 Autres résultats essentiels

Voici maintenant une liste de théorèmes et définitions moins centraux par exemple parce qu'il est difficile de juger central le début d'un cours, mais sans lesquels vous risquez de vous retrouver impuissants.

Dans cette partie, comme dans les suivantes , je ne rappelle pas systématiquement toutes les définitions et tous les savoirs techniques associés déjà cités : c'était l'intérêt des résultats centraux que de vous les remettre en mémoire.

An21 Série alternée

Convergence selon des conditions spécifiques. Majoration et signe (large) du reste.

(*) *clés de la preuve* : suites adjacentes, visualiser sur la droite réelle l'encadrement de la limite par deux sommes partielles consécutives, y faire apparaître le reste et le terme général.

Exercices de base :

a) On note $u_n=\dfrac{n}{1+n^2}$ et $R_n=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k u_k$. Expliquer pourquoi il n'est pas contradictoire d'avoir $|R_0|>u_0$

b) Mêmes notations qu'au a). Justifier l'existence de $R_1(=R_0)$ et montrer que $R_1<0$ à l'aide d'une majoration de R_2 .

An22 Interversion dérivation et série

Théorème d'interversion $D-\sum$. Version locale du théorème.

Exercices de base :

a) Montrer que la fonction du An12 a) est dérivable.
(*)b) Faire de même pour le An12 b).
c) Idem pour le An12 e)

An23 Intégration et série

Théorème d'interversion $\int-\sum$ (intervalle quelconque)

Définitions associées : norme N_1 , convergence simple, continuité par morceaux
Théorème associé : continuité de série de fonctions
Alternative à ce théorème : interversion $\lim-\int$ (revenir à la définition de série).
Exercices de base :

a) Justifier la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin^n(x)\,dx$ et exprimer la somme sous la forme d'une intégrale que vous pourriez calculer par le changement de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, sachant que $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ (vérifier !). *Comparer avec l'exercice An12 c)* $\overset{\odot}{R}$

Indication : curieusement cet exercice fait paniquer, probablement faute de connaître assez bien la fonction sinus pour imaginer qu'il n'y a aucune difficulté à la majorer efficacement sur ce segment.

b) Montrer que le cas où l'intervalle est un segment, que les fonctions sont continues et que la convergence est normale découle en particulier de ce théorème.

An24 Continuité et dérivation d'intégrale dépendant d'un paramètre $\overset{\odot}{R}$

A ne pas confondre avec le cours de sup qui s'intéresse à une variable aux bornes de l'intervalle d'intégration.

Énoncé des théorèmes. Version locale.

Définitions associées : fonctions partielles, classe C^1

Savoir technique associé : intégrabilité, majoration, classe C^1

(*) *clé de la preuve pour la continuité* : caractérisation séquentielle de la limite et bien sûr théorème de convergence dominée.

Exercice de base :

a) Montrer que $\left(x \to \int_0^1 \cos(x t) d t \right)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\overset{\odot}{R}$

Calculez ensuite cette intégrale et essayer de faire le a) avec le seul cours de math sup !

b) Montrer que $\left(x \to \int_0^1 \frac{1}{1+(x t)^2} d t \right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. $\overset{\odot}{R}$

Calculez ensuite cette intégrale et refaire le b) avec le seul cours de math sup

c) Montrer que $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} d t$ définit une fonction continue sur son domaine de définition.

d)(*) Montrer de plus que cette fonction Γ est continûment dérivable. $\overset{\odot}{R}$

La classe C^∞ n'est pas plus difficile.

An25 Norme

Définition de la norme, de la distance associée, exemples basiques de normes : les normes N_2 , N_∞ de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, mais aussi N_1 , N_2 , N_∞ de $C([a;b], \mathbb{R})$

Définitions dérivées : boules ouvertes ou fermées, sphères, application lipschitzienne, partie bornée, limite, continuité

Propriétés associées : inégalité des accroissements finis, continuité d'applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

Compétences de base :

a) Savoir justifier que les normes usuelles sont des normes

b) Savoir justifier qu'une norme est lipschitzienne pour la structure d'espace vectoriel normé qu'elle définit.

c) * Savoir justifier qu'une application linéaire définie d'un espace vectoriel de dimension finie E dans un espace vectoriel normé F est lipschitzienne pour un choix approprié d'une norme de l'espace E .

Exercice :

a) Montrer que $\| P \| = \operatorname*{Sup}_{x\in[0.1]} |P(x)|$ réalise une norme sur $\mathbb{C}[X]$. $\overset{\odot}{R}$

Conseil : la norme sup étant au programme (sur quel espace ?), on n'attend pas nécessairement que vous redémontriez tout. Mais on attend un argument spécifique aux polynômes.

b) Montrer que $\| P \| = \int_0^1 |P(x)| d x$ réalise une norme sur $\mathbb{C}[X]$. $\overset{\odot}{R}$

Même commentaire que pour le a).

An26 Existence d'extremum

pour une fonction continue à valeurs réelles, définie sur un fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercices de base :

a) couplé avec An12 f est une fonction continue sur le produit cartésien $A \times I$ de deux segments. Montrer que $F : \left(x \to \int_I f(x,t) d t \right)$ est continue sur A .

b) Soit f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$. On note $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 , x^2+y^2 \leqslant r^2\}$ où

$r=|f(0{,}0)|+1$,et $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2\geqslant r^2\}$. Rappeler la nature topologique de $\bar{D}$ (*vous devez savoir qu'on demande s'il est fermé, ouvert, borné*). Montrer l'existence de $\alpha=inf\ f(\bar{D})$ et $\beta=inf\ f(E)$ et que de plus $\alpha<r\leqslant\beta$. En déduire que f est minorée et atteint sa borne inférieure. $\overset{\odot}{R}$ *Ce qui n'est pas le cas de* $g=\left(x\to\dfrac{1}{1515x^2+1789y^2+732}\right)$.

3 Quelques bases techniques

Vous aurez rarement des questions de cours sur ce qui suit, mais ce sont en général des présupposés acquis sans lesquels la connaissance des théorèmes précédents est vaine. Un étudiant qui a travaillé régulièrement pendant l'année (donc qui n'a pas fait d'impasse dans la recherche des devoirs et des exercices) et qui a une mémoire satisfaisante n'a pas besoin de les réviser spécifiquement. Si vous identifiez dans cette liste des points que vous avez oubliés, il convient de les retravailler pour combler les omissions. Je ne cite pas dans cette liste les compétences qui sont des prérequis d'un passage en deuxième année.

An31 Développements en série entière usuels

A savoir impérativement : exp, sin, cos, série géométrique, arctan, ln et puissances (ces deux derniers, en $1+x$, bien sûr). Savoir aussi dériver ces séries.

preuve : savoir utiliser une équation différentielle ou une primitivation

Exercices de base :

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(1+1)$ (voir An12 exercice c))

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=\arctan(1)$ (voir An12 exercice d))

c) Proposer une méthode efficace qui permette de développer $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ en série entière sur $]-1\ ;\ 1[$? (il en existe deux autres, qui sont plus calculatoires : lesquelles ?)

$\overset{\odot}{R}$ *En effectuant le produit de Cauchy de deux séries géométriques, on justifie plus généralement l'égalité sur le disque* $\overset{\circ}{D}(0\ ;1)$.

En appliquant la formule généralisée du binôme de Newton, il reste à constater que l'expression générale du coefficient se simplifie : y auriez vous pensé si vous n'aviez pas une autre solution donnant immédiatement cette expression simple ?

An32 Règle de D'Alembert

Essentiellement utile pour les séries entières (voir An13 et An31)

(*) *preuve* : *c'est en fait une règle de comparaison de suites. Vous en déduisez par exemple que dans le cas convergent* $u_n=o(n^{-1789})$ *et que dans le cas divergent* $n^{1515}=o(u_n)$

An33 Dérivation composée

Pas seulement pour les fonctions d'une variable : savoir dériver $f(u(t)\ ,\ v(t))$ à l'aide des deux dérivées partielles de f ainsi que $u(f(x,y))$ (selon x ou y).

Exercices très basiques :

a) Développer $\dfrac{d}{dt}(f(at+b\ ,\ ct+d))$

Exercices assez basiques :

a) Maîtrise de la dérivation partielle.

Soit g une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f définie sur l'ouvert $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ y\neq0\}$ par la relation $\forall\ (x,y)\in U\quad f(x,y)=g\left(\dfrac{x}{y}\right)$. On désire évaluer le laplacien $h=\partial_1^2 f+\partial_2^2 f$ (autre notation très utilisée, mais plus au programme : $D_1^2 f+D_2^2 f$), c'est à dire l'expression $h(x,y)=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ f(x,y)\ )$.

i) Calculer cette expression lorsque $g=\arctan$ $\overset{\odot}{R}$

Pour une conduite efficace des calculs, je déconseille fortement de laisser des fractions de fractions, surtout si vous le faites pour un calcul et pas pour l'autre. Ainsi, si vous regardez bien, vous pourrez économiser un des quatre calculs de dérivation partielle en exploitant une symétrie de rôles.

ii) Exprimer plus généralement $h(x,y)$ à l'aide de g' et g'' $\overset{\odot}{R}$

Je vous conseille d'alléger l'écriture finale en utilisant la notation $u=\dfrac{x}{y}$ *: vous devriez trouver une expression assez simple de* $y^2 h(x,y)$ *en fonction de* u *.*

iii) Vérifier alors le résultat du i) $\overset{\odot}{R}$

Ceux qui n'ont pas vu d'intervention de g' *dans la formule du ii) savent donc qu'ils ont oublié une règle de dérivation, puisque la vérification ne donne pas le résultat attendu. Si vous avez reconnu la dérivée (en* u *) d'un produit, les efforts seront minimes : une fois plus il y a de l'intérêt à regarder et à ne pas considérer tous ces calculs comme une simple succession de symboles vides d'informations, mais ici, vous pouvez vous contenter de savoir bien conduire les calculs pour un premier niveau d'apprentissage.*

b) Composition avec une fonction de deux variables.

On note $g(r,\theta)=f(x,y)$ avec $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

i) Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ à l'aide de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, r et θ puis de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, x et y . On supposera que dans ce contexte $r>0$

ii) Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ à l'aide de $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, x et y puis de $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, r et θ On supposera que dans ce contexte $x>0$, $r>0$ et $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et on exprimera (r,θ) en fonction de (x,y) .

c)* Composition avec une fonction de deux variables. $\overset{\odot}{R}$

Ces calculs sont de mon point de vue moins pénibles que ceux de l'exercice précédent. C'est le contexte plus embrouillé au niveau du statut des variables qui peut poser des difficultés à certains d'entre vous. Ils correspondent à ce qu'un professeur de physique manipulait d'emblée dans son cours de thermodynamique de math sup jusqu'en 1995. Du coup, ce n'était pas le cours sur les fonctions de plusieurs variables, que le prof de maths abordait sensiblement plus tard, que les étudiants trouvaient indigeste, mais le cours de thermodynamique.

On considère trois variables strictement positives (P,V,T) liées par la relation $PV=T$ et une variable associée $S=f(P,V)=g(P,T)$, de sorte que la notation abusive $\left(\dfrac{\partial S}{\partial P}\right)_V$ représente $\dfrac{\partial f}{\partial P}(P,V)$ et que $\left(\dfrac{\partial S}{\partial P}\right)_T$ représente $\dfrac{\partial g}{\partial P}(P,T)$

Exprimer $\left(\dfrac{\partial S}{\partial P}\right)_T$ en fonction de $\left(\dfrac{\partial S}{\partial P}\right)_V$, $\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_P$, P et T .

Je vous conseille de préférer utiliser les notations mathématiques, donc d'exprimer $g(P,T)$ *en fonction de* f , P et T *, et, seulement à la suite des calculs de dérivation partielle, de passer aux notations plus familières aux physiciens.*

d)* Variables liées

On considère 3 variables P , V et T liées par la relation $F(P,V,T)=0$ par exemple $F(P,V,T)=\left(P+\frac{1}{V^2}\right)(V-1)-T$ (van der Waals) ou $F(P,V,T)=PV-T$ (gaz parfait).

En résolvant la relation comme une équation en une de ces variables, on peut l'exprimer en fonction des deux autres (on admet que c'est possible dans le domaine étudié). Ainsi on définit 3 fonctions par les relations $T=\varphi(P,V)$, $P=\psi(V,T)$ et $V=\xi(P,T)$ $\overset{\odot}{R}$ *. Pour les gaz parfaits, on aurait par exemple* $\psi(V,T)=\frac{T}{V}$. En physique, on ne donne pas de nom à ces fonctions et on note par exemple $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ l'expression $\frac{\partial}{\partial T}(\psi(V,T))$. Exprimer cette dérivée à l'aide des dérivées partielles de F . On admettra que ces dérivées ne s'annulent pas.

Qu'en déduisez-vous sur $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \times \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \times \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$? $\overset{\odot}{R}$ *Cela confirme que les dérivées partielles n'ont pas les mêmes propriétés que les dérivées droites (= dérivées usuelles).*

An34 Dériver B(f , g)

où B est bilinéaire. Exemples usuels de telles applications B

Exercices de base :

a) Montrer que tout mouvement à accélération centrale de centre O a son moment cinétique $\overrightarrow{OM}\wedge\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ constant.

b) Dériver $\|\vec{f}\|$ où la norme est euclidienne (déduite d'un produit scalaire réel) et $\vec{f}$ est une fonction vectorielle ne s'annulant pas. *On en déduit que pour tout mouvement sur une sphère, la vitesse est orthogonale au rayon.*

An35 Extrema locaux (fonction d'une ou de plusieurs variables)

Condition nécessaire pour qu'un point réalise un extremum local.

Définitions associées : point critique, ouvert, minimum ou maximum local

Savoirs techniques associés : dérivée partielle, résolution de systèmes d'équations non linéaires, reconnaître un ouvert, un compact sur des exemples concrets.

Exercices de base :

a) Donner les valeurs extrémales de $f(x,y)=x^2-y^2$ sur le disque fermé de centre $(0;0)$ *. C'est du propos de la question de cours XVI d'en justifier l'existence.*

b) Faire de même pour $g(x,y)=x^2+xy+y^2$

Ag31 Matrices orthogonales en dimension 2

Mesure de l'angle d'une rotation (ne pas oublier qu'elle dépend du choix de l'orientation du plan). A mémoriser : $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est directe si et seulement si $(\vec{u}\ ;\ -\vec{v})$ est indirecte. Lien entre matrice de rotation et matrice de passage entre deux bases orthonormales directes.

J'utilise la notation $Rot(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Connaître le lien avec $\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\to e^{i\theta}z\end{cases}$.

Définitions associées (*en dimension quelconque*) : isométrie, réflexion

Propriétés associées : conservation de la norme du produit scalaire, des bases orthonormales, des bases orthonormales directes, expression simple de l'inverse, calcul de l'image par une réflexion à l'aide d'un vecteur normé orthogonal à l'axe.

Notations associées : $O_2(\mathbb{R})$ ou $O(2)$, $SO_2(\mathbb{R})$ ou $SO(2)$

Exercices de base :

a) Compléter le vecteur $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ en une base orthonormale directe (respectivement indirecte) de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Quelle est alors la matrice de passage de cette base vers la base canonique ?

Si vous ne voyez pas le lien avec la question de cours, c'est que vous apprenez des formules sans savoir ce qu'elles représentent

b) Montrer en très peu de calculs que la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ représente une réflexion, c'est-à-dire une symétrie axiale orthogonale. *Indication* : *si vous connaissez un moyen de déduire toutes les bases orthonormales indirectes à partir de la connaissance de leurs homologues directes, vous trouvez cette question évidente.*

Retrouver ce résultat en déterminant son axe et en vérifiant que son orthogonal est bien une droite de vecteurs anti-invariants.

c) La matrice de f dans une base $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, probablement mal choisie, est $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Comment est-il possible que f ne soit pas une rotation ?

d) Soit r une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul d'un plan euclidien. Comme $\vec{u}$ et $r(\vec{u})$ sont non alignés, ils forment une base de ce plan. Déterminer la matrice de r dans cette base non orthonormale. *A faire de préférence sans passer par une matrice de passage* !

Remarque : si vous utilisez l'outil complexe avec $j=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$, sachant que $1+j+j^2=0$, vous avez une approche algébrique pour évaluer $r^2(\vec{u})$ autrement que par visualisation géométrique.

P31 Adaptation des formules de probabilité aux sommes infinies.

Formule des probabilités totales, formules de Bayes. *Une simple formalité* !

P32 Loi géométrique de paramètre p .

dont l'espérance, la variance (*à savoir justifier par la définition, mais aussi à l'aide de sa fonction génératrice*)

Définitions associées : loi d'espérance finie, variance

Une preuve de cours :

Montrer qu'une telle loi est sans mémoire :

$\forall\, n \geqslant 0\ ,\ \forall\, k > 0\ ,\quad P(\,X = n+k \mid X > n\,) = P(\,X = k\,)$ et en déduire que

$\forall\, n \geqslant 0\ ,\ \forall\, k \geqslant 0\ ,\quad P(\,X > n+k \mid X > n\,) = P(\,X > k\,)$

* Montrer réciproquement que cette dernière égalité caractérise une loi géométrique

Exercice très basique :

a) Au jeu des petits chevaux, il faut lancer un 6 pour pouvoir sortir un cheval. Vous supposez bien sûr que le dé n'est pas pipé. Au bout de combien de tours attendez vous à sortir un cheval ? A partir de combien de tentatives infructueuses pouvez-vous dire que vous êtes malchanceux sans trop passer pour un mauvais joueur ?

Ma réponse est : *au delà de* $6+\sqrt{24}\approx 6+\sqrt{25}$ *donc à partir du 11ème tour . Considérer que vous devez sortir au bout du temps espéré est une conception abusive de la moyenne.*

P33 Loi de Poisson de paramètre λ .

dont l'espérance et l'écart type (*à savoir justifier*)

Définitions associées : loi d'espérance finie, variance

Démonstration de cours :

Montrer que si X et Y sont deux lois indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre respectif λ et μ , alors il en est de même de $X+Y$. Préciser son paramètre. Retrouver ce résultat à l'aide des fonctions génératrices.

<u>**Quelques résultats secondaires**</u>

Vous vous souvenez probablement d'un bon nombre de ceux-ci : ils complètent les savoirs fondamentaux précédents, car le cours ne peut pas se réduire à un squelette sans chair qui ne tiendrait que par des fixations métalliques.

An41 série produit de deux séries absolument convergentes

dont le cas particulier des séries entières

Application de base : montrer la formule fondamentale sur l'exponentielle.

Exercice élémentaire :

a) Que donne le produit de Cauchy de deux suites géométriques convergentes de raison respective a et b ?

Cas particulier où $a=b$? *Le cours sur les séries entières permet de retrouver la formule, mais uniquement si la raison est <u>réelle</u> .*

XXIII lien entre convergence de série et intégrabilité

d'une fonction positive décroissante

Preuve : essentielle pour l'exercice c) , idée exploitable aussi au d)

Exercices :

a) Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$

En cas de blocage : penser à effectuer un changement de variable.

b) Faire de même pour $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$

c) Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

d) Faire de même pour $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

XXIV Définition des ensembles convexes

Il faut savoir en particulier redémontrer que les boules ouvertes et les boules fermées sont convexes quelle que soit la norme qui les définit. Autres exemples à savoir assurer : convexité des sous-espaces affines (ce sont les translatés d'espaces vectoriels qu'on rencontre lorsqu'on résout un système linéaire).

Exercices :

a) démontrer que $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1 \right\}$ est convexe.

Indication : ramener à un convexe de référence par une application linéaire bien choisie.

b) Montrer qu'un demi-plan est convexe (il est défini par une inégalité stricte ou large de type $\varphi(x, y) < 0$ où $\varphi(x, y) = 0$ définit la droite qui le délimite).

c) Montrer que l'intersection d'une famille de convexes est aussi convexe. Qu'en est-il de la réunion ?

d) Montrer que l'image réciproque d'un convexe par une application linéaire est un convexe. Illustrer cette propriété sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 , \quad x - 2y + 3z \leqslant 4\}$

P41 Continuité monotone des probabilités

Propriété de la continuité croissante, et celle de la continuité décroissante.

Démonstration de cours : en déduire la sous-additivité des probabilités.

Exercice de base :

a) Montrer que si les A_n sont presque sûrement faux $(P(A_n) = 0)$ pour tout entier n alors il en est de même de leur réunion. *Et la sous-additivité s'impose.*

Montrer que si les A_n sont presque sûrement vrais $(P(A_n) = 1)$ pour tout entier n alors il en est de même de leur intersection.

b) On considère une suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0 ; 1[$. Montrer que l'événement $(\forall n \quad X_n = 1)$ est de probabilité nulle. *Comme quoi "improbable" n'est pas "impossible".*

<u>Résultats plus spécialisés</u>

Ce qui suit concerne des notions dont on a tendance à oublier les détails, faute de les utiliser régulièrement, parce qu'en toute cohérence les concours écrits les sollicitent moins, et quand c'est le cas, rarement de manière à ce qu e le reste en dépende. Il convient de les réviser dans les derniers jours qui précèdent une épreuve, surtout pour l'oral où la stratégie d'impasses est plus hasardeuse.

N Vecteur normal à une courbe régulière du plan ou une surface régulière en dimension 3.

On a en particulier une interprétation géométrique du fait que la dérivée d'un vecteur de norme constante est orthogonale au vecteur.

Définitions associées : gradient, , vecteur vitesse (ou tangent), droite ou plan tangent, courbe inscrite, courbes de niveau (ou équipotentielles en physique)

Exercices :

a) Donner une équation de la tangente au point $(a, 0)$ de la courbe d'équation $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$ étant donné).

b) Quels sont les points à tangente horizontale de la courbe du a) ?

c) Le graphe d'une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admet-il des points à tangente verticale ?

<u>Résultats plus pointus</u>

Je les ai classés à peu près du plus pratique au plus abstrait : les derniers de la liste sont sensiblement plus abstraits et occasionnellement requis aux concours les plus prestigieux.

XXVIII Caractérisation séquentielle de la limite

XXIX Propriétés et opérations sur les ouverts et les fermés en dimension finie

dont la caractérisation séquentielle de la fermeture, la possibilité de reconnaître un ouvert ou un fermé à partir d'inégalités et de fonctions continues.

Exercices :

a) Retrouver le caractère ouvert des boules ouvertes sans utiliser l'inégalité triangulaire (donc sans revenir à la définition des ouverts)

b) Faire de même pour la fermeture des boules fermées : par deux méthodes.

c) Montrer que les pavés $[a\ ;\ b]\times[c\ ;\ d]$ sont fermés par trois méthodes : les deux pratiques et à l'aide de demi-plans fermés (pris comme fermés de référence)

d) Montrer qu'un produit cartésien de deux fermés est un fermé

e) Faire de même pour un produit cartésien d'ouverts. *C'est là qu'on apprécie l'usage de la norme sup , et vous pouvez aussi utiliser le d) avec une opération ensembliste.*

An63 Équivalent de Stirling

c'est-à-dire de $n!$

(*) *plan de la partie instructive de la preuve* : faire le quotient et prouver qu'il tend vers une limite finie strictement positive. *Clé* : série des différences mais aussi $\exp\ \ln$.

XXXI Interversion limite et continuité

Définitions associées : suite de fonctions, convergence simple, convergence uniforme, notion globale (la convergence uniforme), notion locale (la continuité.

Savoirs techniques associés : majoration <u>en valeur absolue</u> , norme sup

Exercices de base :

a) Montrer que la suite $\left(x \to x^n \right)_{n\geqslant 0}$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0\ ;\ 1]$.

b) Montrer que si la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ converge uniformément, alors la <u>suite</u> $\left(u_n(x)\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément. *Indication* : $u_n = R_n - R_{n+1}$ avec $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$

XXXII Interversion limite et dérivation ($\lim - D$)

XXXIII Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence

à partir des suites bornées.

XXXVIP61 Espaces probabilisés

Définitions associées : tribu, union dénombrable d'événements incompatibles, $\sigma-$additivité , ensemble dénombrable.

Savoirs techniques associés : calculs de séries à termes positifs (dont la convergence est assurée, pourquoi ?), définir une probabilité sur $\mathbb{N}$ à partir d'une série de termes positifs de somme 1 .

Démonstration de cours : montrer que P_B , probabilité sachant B , définit une autre probabilité sur la tribu où P est définie.

Exercices de base :

a) Quelle est la probabilité qu'un entier soit pair si les entiers suivent une loi géométrique de paramètre p : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(\{n\}) = p(1-p)^n$ avec $0 \leqslant p < 1$?

b) Justifier qu'il ne peut pas exister de probabilité sur un ensemble dénombrable telle que les événements élémentaires soient équiprobables.

XXXVII Variables aléatoires discrètes

Définition associées : loi associée, en particulier loi marginale et lois conjointes, indépendance de deux v.a.d., savoir quelles sont les écritures ensemblistes des événements $(X \in U)$, $(X = x)$, $(X \leqslant x)$

Preuves de cours :

a) montrer que la loi associée à X définit une loi de probabilité sur $X(\Omega)$

b) montrer que si X et Y sont deux v.a.d. indépendantes, alors c'est le cas de tout couple de v.a. composée $f(X)$ et $g(Y)$ (*en admettant le théorème qui stipule que* $\forall\, U \subset \operatorname{Im} X$, $\forall\, V \subset \operatorname{Im} Y$, $P(X \in U\ , Y \in V) = P(X \in U) \times P(Y \in V)$)

XXXVIII Définition de la covariance de deux variables aléatoires, coefficient de corrélation.

Définitions associées : espérance, variance, écart type, loi conjointe, lois marginales, lois indépendantes.

Propriétés associées : variance d'une somme finie de variables aléatoires, inégalité de Cauchy-Schwarz,

XXXIX Intérieur, adhérence et frontière.

Plus que ces notions, le plus important est de connaître :

la définition séquentielle des points adhérents et sa nécessité pour définir la notion de limite en un point,

la différence entre fonction continue sur un ensemble et en tous les points de cet ensemble, l'intérêt de l'intérieur d'une partie pour relier ces deux notions.

Exercices de base :

a) Montrer que si une fonction est continue sur des ouverts, elle l'est sur leur réunion. *Si vous avez compris ce qu'est une notion locale, vous trouvez cette question très facile.*

XLI Définition de l'orientation

d'un espace euclidien.

Définition associée : base directe, base indirecte.

XLII Équivalence des normes en dimension finie

Pour le programme de PC, cela revient simplement à formuler que les problèmes de limite, la reconnaissance d'ouverts, d'applications lipschitziennes, de parties bornées, etc …, en dimension finie ne dépendent pas du choix de la norme.

Pour le niveau * , il vaut mieux savoir que c'est parce que les normes se dominent mutuellement comme il a été vu avec les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.

<u>REMARQUES ET COMMENTAIRES</u>

An11

Ce théorème n'est pas le plus important des théorèmes d'interversion seulement parce qu'il permet de démontrer les interversion continuité-intégrale et dérivation-intégrale, mais aussi parce qu'il donne l'esprit de construction de tous les théorèmes d'interversion : des hypothèses de régularités correspondant à ce qu'on veut (si c'est une intégrale, on veut de la continuité par morceaux, s'il y a de la dérivation, on veut de la classe C^1 , etc...), et des hypothèses fortes de contrôle qui assurent les convergence et paient le prix de l'interversion (d'où la domination, mais pour des suites de fonctions ça serait la convergence uniforme).

c) Vous pourriez calculer la limite en utilisant le changement de variable $u=\tan(t/2)$ et en démontrant que $\sin t = 2u/(1+u^2)$.

On peut justifier la seule convergence en application du théorème spécial des séries alternées, mais ce n'est pas le propos car ça ne donne pas la limite.

En indication, je vous signale que cet exercice ressemble très fortement à un qui est posé en application des interversions $\sum - \int$ *. Ce n'est donc pas innocent si je l'ai mis dans cette question de cours (**<u>indication</u>** !).*

Je vous propose en rab de justifier que si le théorème d'interversion $\sum - \int$ *pouvait s'appliquer* *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;0\right]$ *, alors* $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left|\sin^n\right|$ *serait une série convergente et l'intégrale suivante serait aussi convergente :* $\int_{\left]-\frac{\pi}{2}\ ;0\right]}\frac{1}{1-|\sin|}$ *, ce qui n'est* ***pas le cas****.*