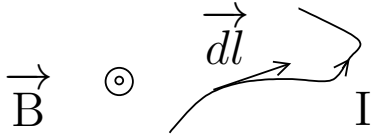


RÉVISION DE SUP : INDUCTION.

I. Action d'un champ magnétique

I.1 Force de Laplace sur un petit élément

La force élémentaire exercée sur un petit élément de longueur $d\vec{\ell}$ est :

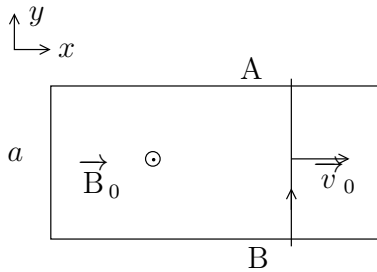


$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

L'orientation de $d\vec{\ell}$ est celle de I.

I.2 Résultante et puissance des forces de Laplace

a) Tige conductrice en translation



$$\vec{F} = \int_B^A I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0 = I l B_0 \vec{u}_x$$

L'orientation de $d\vec{\ell}$ est celle de I.

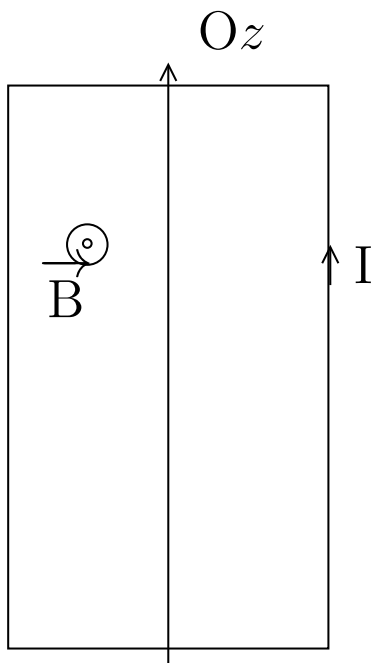
Remarque : Le sens choisi pour I est arbitraire mais il oriente le contour. Tous les calculs doivent être cohérents avec ce choix.

La puissance associée à la force de Laplace est alors :

$$\mathcal{P} = I l B_0 v_x \text{ si on note } \vec{v} = v \vec{u}_x$$

Rem : Si le courant qui circule réellement est dans le sens choisi alors il est effectivement positif, sinon on trouvera que le courant est négatif.

b) Spire rectangulaire en rotation



On considère un cadre rectangulaire sur lequel on enroule N spires. Ce cadre est libre de tourner autour de l'axe Oz.

Les actions qui s'exercent sur le cadre sont alors :

$$\vec{F} = \vec{0} \text{ les forces de Laplace s'annulent 2 à 2}$$

Le moment des actions de Laplace est non nul : la spire va donc tourner. C'est le principe du moteur. L'ensemble des moments se résume à un couple :

$$\vec{\Gamma} = NI \vec{S} \wedge \vec{B}$$

On reconnaît le moment dipolaire associé à la spire : $\mathcal{M} = NI \vec{S}$.

c) Effet d'un champ magnétique tournant

Si on considère l'expression précédente, sous l'action du couple, la spire va tourner (théorème du moment cinétique) (donc le vecteur surface aussi) autour de $\vec{u}_z$:

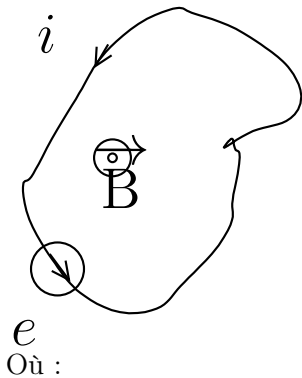
$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (NI \vec{S} \wedge \vec{B})$$

)

Si on considère $\vec{B}$ fixe, la spire va donc tourner jusqu'à ce que le vecteur surface soit parallèle à $\vec{B}$. Si on fait tourner $\vec{B}$, la spire va donc avoir tendance à tourner pour aligner $\vec{S}$ selon $\vec{B}$: c'est le principe du moteur électrique.

II. Lois de l'induction

II.1 Loi de Faraday



$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Où :

1. Φ est le flux à travers une surface reposant sur le circuit filiforme. Si le circuit est plan, on choisira bien entendu une surface plane limitée par le circuit.
2. e la *f..m.* induite.

i et e sont orientés dans le même sens. Le sens de i est un sens algébrique : si i est effectivement dans le sens choisi alors il est positif (idem pour e). Le sens choisi pour i oriente le contour et donc la surface pour le calcul du flux.

II.2 Loi de Lenz

« Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui les ont créées. »

C'est une loi de modération. Elle permet de prévoir qualitativement ce que l'on va observer.

Le signe $-$ dans la loi de Faraday est lié à la loi de Lenz : si le flux diminue au cours du temps la *f..m.* est positive, donc i aussi ce qui crée un champ magnétique induit qui s'ajoute au champ $\vec{B}$ initial, ce qui a tendance à augmenter le flux total.

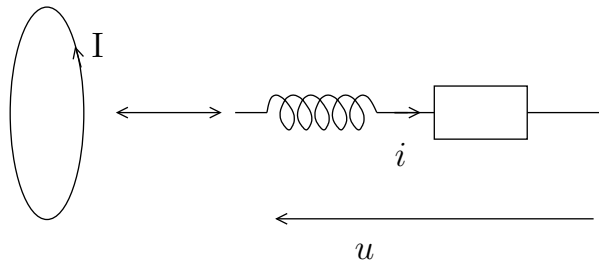
III. Circuit fixe dans un champ variable dans le temps

III.1 Auto-induction

Soit une spire (plus généralement un circuit) parcourue par un courant I . Ce courant crée alors un champ magnétique propre $\vec{B}_p$ dont le flux à travers cette spire s'appelle le flux propre, Φ_p . Le flux propre s'écrit alors :

$$\Phi_p = \iint \vec{B}_p \cdot d\vec{S} = LI$$

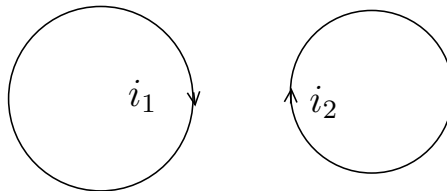
L se nomme le coefficient d'auto-induction ou inductance propre, son unité est le Henry (H). L ne dépend que des paramètres géométriques du circuit. Ainsi tout circuit filiforme peu se modéliser par une inductance en série avec une résistance.



On a alors :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \text{ avec } R \text{ la résistance du circuit.}$$

III.2 Inductance mutuelle



La question qui se pose est la suivante : Quel est le flux produit par le circuit 1 à travers 2 et réciproquement. Si on s'intéresse au flux créé par le circuit 1 à travers le circuit 2, il s'écrit :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

$\vec{B}_1$ est proportionnel à i_1 et aux paramètres géométriques du circuit 1. L'intégrale précédente fait alors aussi apparaître les propriétés géométriques du circuit 2. On peut donc écrire :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} i_1$$

La loi est symétrique en inversant les indices 1 et 2. On admet le théorème de Neumann :

$$M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$$

Finalement :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \text{ et } \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

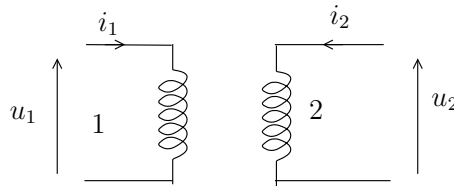
L'inductance mutuelle peut-être positive ou négative. cela dépend de l'orientation relative des circuits. Elle s'exprime bien entendu en Henry.

Du point de vue de la modélisation électrocinétique, on écrira :

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \text{ et } u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

III.3 Transformateur idéal

Il s'agit de deux bobines en influence totale (toutes les lignes de champ de l'une passe par les lignes de champ de l'autre).



Soit φ le flux à travers une spire. On considère les résistances des deux bobines négligeables.

Alors :

$$u_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \text{ et } u_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt} \text{ (convention générateur)}$$

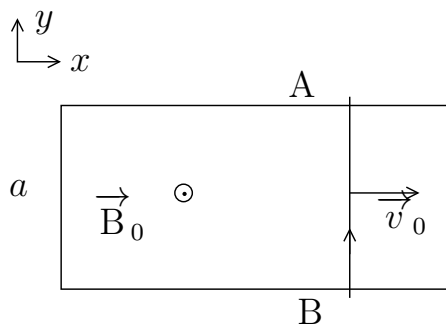
Le rapport donne :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Un transformateur permet donc de faire varier facilement l'amplitude d'une tension variable (c'est l'un des grand intérêt par rapport au continu).

IV. Circuit mobile dans un champ stationnaire

IV.1 Rail de Laplace



Le rail est lancé à $\vec{v}_0$, le champ magnétique est constant et égal à $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

Analyse qualitative : D'après la loi de Lenz, il apparaît une intensité $i < 0$ pour diminuer le flux, ce qui correspond à un eforce de Laplace sur la barre qui la freine.

a) Calcul de la f.é.m. induite

Calculons le flux de $\vec{B}$

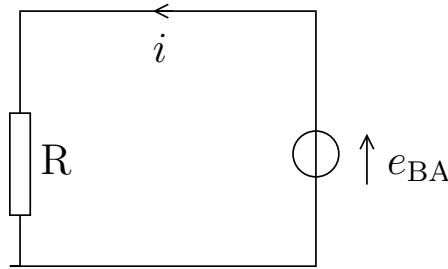
$$\Phi = \iint \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = B_0 a x$$

Grâce à la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 a v_x$$

b) Étude détaillée du système

L'analyse qualitative étant faite et le f.é.m. déterminée, il nous reste l'étude électrique et mécanique du circuit afin de déterminer l'intensité et la vitesse.



Étude électrique : d'après la loi d'Ohm généralisée :

$$i = \frac{-v_x B a}{R}$$

Étude mécanique :
référentiel terrestre galiléen

Système tige

Bilan des forces :

- $\vec{P} = m \vec{g}$
- $\vec{R}$: réaction des rails
- $\vec{F} = \int_B^A i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0 = i a B_0 \vec{u}_x$

D'après la relation fondamentale de la dynamique en projection selon $\vec{u}_x$:

$$i a B_0 = m \frac{dv_x}{dt} \quad \text{En remplaçant } i \text{ par son expression :}$$

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{B_0^2 a^2}{m R} v = 0$$

Ce qui donne :

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ et } i = -\frac{B a v_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) < 0$$

L'expression de τ se déduit facilement de l'équation différentielle.

c) Bilan énergétique

L'énergie dissipée par effet Joule est :

$$E = \int_0^\infty R i^2 dt$$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

L'énergie cinétique initiale s'est complètement dissipée par effet Joule dans le circuit.

Puissance de la force de Laplace :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = i a B_0 v = -e_{BA} \cdot i$$

$$\mathcal{P} + e_{BA} \cdot i = 0$$

Relation que l'on retrouvera à chaque fois qu'un circuit se déplace dans un champ stationnaire : elle traduit le couplage électromécanique : la puissance des actions de Laplace est intégralement transformée en puissance électrique pour mettre en mouvement les charges.

IV.2 Freinage par induction

Un objet métallique se déplaçant dans un champ $\vec{B}$ va être le siège de courant en volume. ceux-ci sont appelés courant de Foucault.

Ils s'opposent à la cause (déplacement) qui les a créés d'où le freinage.

IV.3 Moteurs

cf colle, TD.