

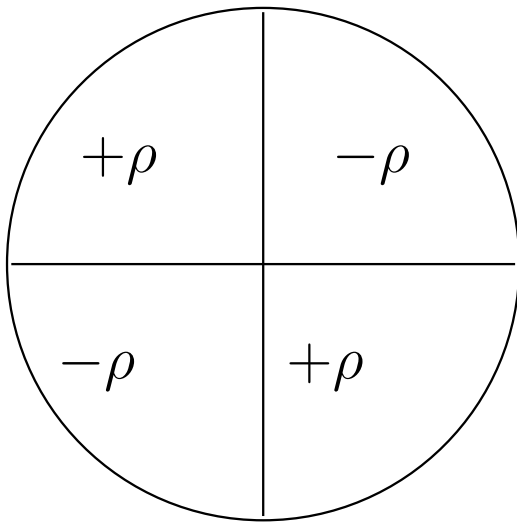
TD N °2 : CHAMP ÉLECTROSTATIQUE, POTENTIEL, THÉORÈME DE GAUSS

I. Questions de cours

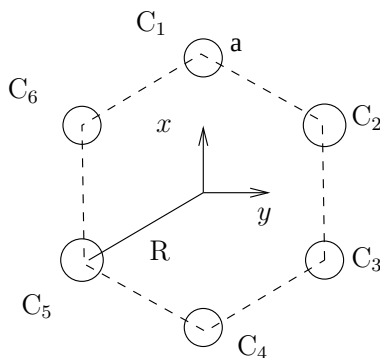
1. Énoncer la loi de Coulomb. Donner la valeur de ε_0 .
2. Définir la densité volumique de charge.
3. Donner l'expression de la force électrique.
4. Donner l'expression du champ électrique créé par une charge électrique ponctuelle.
5. Définir les lignes de champ et les tubes de champ.
6. Donner des ordres de grandeur de champ électrique.
7. Énoncer le principe de superposition.
8. Énoncer le principe de Curie.
9. Symétrie, antisymétrie plane et invariances.

II. Propriétés de symétrie ♣

Que pouvez-vous dire du champ électrique créé par cette boule ?



III. Hexapôle électrostatique ♣



On considère 6 électrodes cylindriques et parallèles dont les bases sont centrées sur les sommets d'un hexagone régulier. Leurs rayons a est très inférieur au côté R de l'hexagone $a \ll R$. Elles portent des densités linéiques de charge égales alternativement à $\lambda(> 0)$ pour les électrodes paires et $-\lambda$ pour les électrodes impaires.

On considère les charges uniformément réparties à la surface des électrodes et on néglige les effets de bord

1. Quelles conclusions sur le champ $\vec{E}$ et le potentiel V tire-t-on de l'invariance par translation du système ?
2. Considérer un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe. Quelle propriété du champ électrique $\vec{E}$ déduit-on ?

3. Même question pour l'un des trois plans passant par l'axe central et les axes de deux électrodes opposées.
4. Montrer que les trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes sont équipotentiels.
5. Quelle est la période d'invariance du système par rotation autour de Oz.

IV. Charges sur un carré

On a représenté les lignes de champs et les équipotentiels associées à 4 charges réparties occupant chacune les sommets d'un carré.

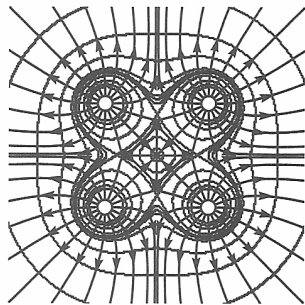


Figure 13.27 – Cas (a) :
(1 : 1 : 1 : 1)

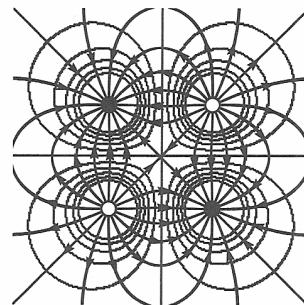


Figure 13.28 – Cas (b) :
(-1 : 1 : -1 : 1)

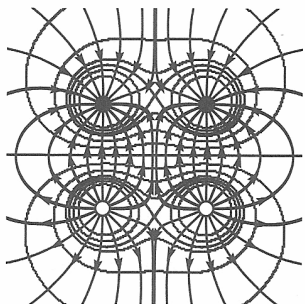


Figure 13.29 – Cas (c) :
(-1 : -1 : 1 : 1)

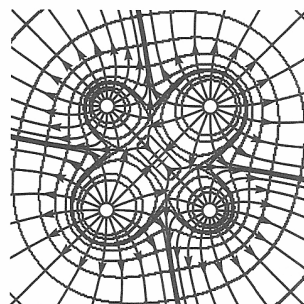


Figure 13.30 – Cas (d) :
(1 : 2 : 1 : 2)

Que pouvez-vous en déduire ?

V. Équipotentiels

On s'intéresse aux surfaces équipotentiels correspondant à une distribution de charges donnée.

1. En tout point d'une même équipotentielle, le module du champ électrostatique est-il le même ?
2. En un point d'une équipotentielle, quelle est l'orientation du champ électrostatique ?
3. Une équipotentielle peut-elle se recouper ?
4. Deux surfaces équipotentiels peuvent-elles se couper ?

VI. Muscler le calcul

Calculer les champs, leur divergent et les potentiels selon les cas :

1.
$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + z^2} - z) \quad z \text{ est la seule variable}$$

2. $\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$ où r est la coordonnée sphérique radiale

3. $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$ où r est la coordonnée cylindrique radiale

4. $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ où r et θ sont des coordonnées sphériques

VII. Champ créé par une boule

Calculer le champ électrique créé par une boule de rayon a , de charge volumique uniforme ρ en tous points de l'espace.

VIII. Champ créé par un cylindre

Calculer le champ électrique créé par un cylindre de rayon a et de longueur L , de charge volumique uniforme ρ en tous points de l'espace.

On suppose $L \gg a$

Tracer les lignes de champ et en déduire la forme des équipotentiels.

IX. Champ gravitationnel de la Terre ♪

Déterminer le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre.

X. Grotte sphérique ♪♪

On considère une cavité sphérique de rayon a , creusée à l'intérieur de la Terre de rayon R et de masse volumique μ .

Que vaut le champ gravitationnel dans la cavité ?

XI. Expérience de Millikan, détermination de e ♪♪

On place dans l'air deux plaques métalliques parallèles, horizontales, espacées de $d = 3$ cm. La plaque supérieure est reliée à la masse, et on applique un potentiel $U = 40000$ V à la plaque inférieure.

1. Donner la direction du champ $\vec{E}$.

Par un dispositif annexe, on fait tomber des gouttes de glycérine de rayon R compris entre 2 et 5 μm par une ouverture dans la plaque supérieure. On rappelle la loi de Stokes : $\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{v}$, et on donne la masse volumique de la glycérine : $\mu_{\text{glycérine}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^3$.

2. Écrire l'équation du mouvement d'une goutte lorsqu'elle n'est pas chargée. Proposer une méthode expérimentale qui permettrait de déterminer η .

À présent, on envoie de brefs flashes de rayons X qui chargent les gouttes ; leur charge est notée q .

3. Quelle est la nouvelle équation du mouvement ? Intérêt de l'expérience ?

4. Tout au long du problème, on a négligé la poussée d'Archimède. Est-ce justifié ? On donne $\mu_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^3$.

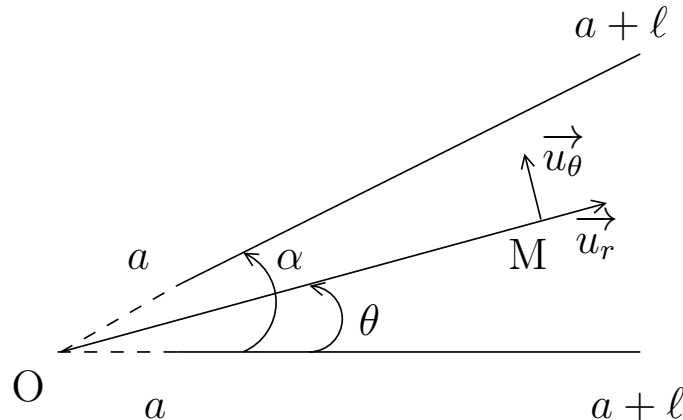
XII. Les condensateurs utilisés comme capteur : hygromètre ♪♪

L'industrie électronique fabrique des capteurs hygrométriques dont le fonctionnement est relativement simple : un milieu susceptible de fixer des molécules d'eau est emprisonné entre deux électrodes. Le condensateur ainsi réalisé est analogue à un condensateur plan dans le vide, à l'exception de la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 qu'il convient de remplacer par la permittivité diélectrique du milieu $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, ϵ_r a une valeur proche de 1 mais qui

dépend de la fraction molaire d'eau contenue dans l'atmosphère. Une relation connue permet de trouver le degré hygrométrique connaissant la capacité du condensateur.

Le dispositif expérimental doit donc permettre de mesurer la capacité du capteur (comprise entre 100 et 150 pF), avec une assez bonne précision, en s'affranchissant des perturbations introduites par les câbles de connexion entre le capteur et l'électronique de mesure.

1. Il est possible de rencontrer des condensateurs avec des défauts de construction et ces défauts peuvent modifier la valeur de la capacité. Par exemple, les deux armatures (considérées infinies) peuvent ne pas être parfaitement parallèles et c'est précisément cette situation que nous voulons étudier ici. On supposera alors que les deux armatures forment un dièdre d'angle comme indiqué sur le schéma ci-après.



Tout point M entre les armatures est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . En tout point M, on définit également une base locale $(\vec{u}_r(M), \vec{u}_\theta(M), \vec{u}_z)$ de l'espace. En particulier tout point de l'armature du bas est caractérisé par $\theta = 0$ alors que tout point de l'armature du haut est tel que $\theta = \alpha$. En outre, les armatures ont une longueur L dans la direction Oz, et ℓ dans la direction radiale, de telle sorte qu'elles soient comprises entre $r = a$ et $r = a + \ell$. On suppose en outre que l'armature du bas est au potentiel V_1 alors que celle du haut est au potentiel V_2 .

- a) Donner, en la justifiant l'équation locale vérifiée par V.
- b) Résoudre cette équation et en déduire que V s'écrit sous la forme :

$$V(\theta) = A\theta + B$$

Où A et B sont deux constantes que l'on exprimera en fonction de V_1 , V_2 et α .

- c) En déduire l'expression de $\vec{E}$ en un point M entre les armatures.
- d) On admet que au voisinage de l'armature du bas ($a < r < a + \ell, \theta = 0^+$), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma(r, 0)}{\epsilon} \vec{u}_\theta$$

En déduire la charge surfacique de l'armature inférieure. Que vaut alors la charge totale Q de cette armature ?

- e) Montrer que l'on peut écrire :

$$Q = C_1(V_1 - V_2) \text{ et que } C_1 = \frac{\epsilon L}{\alpha} \ln \frac{a + \ell}{a}$$

2. On veut maintenant comparer C_1 à la valeur du condensateur plan C. Pour cela on considère le condensateur diédrique dans la limite où α tend vers 0, a tend vers l'infini avec la condition $a\alpha = e$ où e est fixée. Justifier que dans cette limite la capacité du condensateur diédrique tend vers celle du condensateur plan d'épaisseur e, de longueur L et de largeur ℓ .
3. En déduire que sous ces conditions :

$$C_1 = C - \delta C \text{ avec } \delta C = \frac{\alpha \ell}{2e} C$$

On rappelle que $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}$.

4. On donne $\alpha = 1'$, $e = 1 \mu\text{m}$, $\ell = 1 \text{ mm}$ et $L = 2 \text{ mm}$. Estimer $\frac{\delta C}{C}$ et conclure.

XIII. Résolution de problème : L'empereur Palpatine (D'après Roland Lehoucq) ♪♪

Dans l'épisode VI de la guerre des étoiles, l'empereur Palpatine torture et tente de tuer Luke Skywalker à l'aide d'éclairs surgissant de ses mains. Extrait vidéo :

<https://www.youtube.com/watch?v=4BOQI-LAEzM>

Un courant de 300 mA provoque des arythmies cardiaques réversibles (mais sans doute peu agréables). On peut estimer qu'un ampère vous tue avec certitude.

Estimer la puissance libérée par l'empereur.

XIV. Résolution de problème : Ligne Haute tension ♪♪♪

Une ligne haute tension est à un potentiel de 300000 V. On admettra ici que le potentiel d'une surface conductrice est le même en tout point.

1. Que pouvez-vous dire du potentiel à un mètre de la ligne ?
2. À quelle différence de potentiel un agent qui travaille sur cette ligne est-il soumis ? Conclusion ?
3. L'agent revêt donc une combinaison conductrice (justifier rapidement). Que se passe-t-il la première fois qu'il approche sa main de la ligne ?

