Résumé de mécanique du point

Table des matières

Introduction

Ceci est un résumé du cours de première année en mécanique du point en référentiel galiléen ainsi que sur la rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

I. les grandeurs

- La masse inertielle m_i. C'est elle qui intervient dans la deuxième loi de Newton :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = m_i \overrightarrow{a}$$

À force constante, plus m_i sera grande, plus l'accélération sera faible. La masse inertielle s'oppose à la variation de la vitesse du point. Autrement dit : il est d'autant plus difficile de modifier la trajectoire d'un objet que sa masse est grande (cf chariot de supermarché plein ou vide).
- La masse gravitationelle m_g. C'est elle qui intervient dans l'expression de la force de gravitation. A priori $m_g \neq m_i$ mais expérimentalement, on vérifie que les deux sont égales (à 10^{-10}% près).
Cette égalité est un postulat de la relativité générale.
Par la suite on écrira $m = m_i = m_g$.
- La position : $\overrightarrow{r}$ (en m), la vitesse $\overrightarrow{v} = \dfrac{dr}{\mathrm{d}t}$ (en $\mathrm{m.s^{-1}}$) et l'accélération $\overrightarrow{a} = \dfrac{dv}{\mathrm{d}t}$ (en $\mathrm{m.s^{-2}}$).
- La force : **il faut connaître les expressions des forces classiques rencontrées l'an dernier : tension du ressort, poids, force d'Archimède, force de frottement fluide, force électrique et magnétique, force gravitationelle, force d'inertie d'entraînement, force de Coriolis.**
Rappel : les forces de tension d'une corde ou de réaction d'un support n'ont pas d'expression propre. Ce sont des forces à déterminer (si besoin) qui « s'adaptent » à la situation.
- La quantité de mouvement :

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} \text{ en } \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

- Le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{p} \text{ en } \mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$$

- Grandeurs énergétiques :
  - Puissance d'une force en watts (W) :

$$\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{\mathrm{F}}.\overrightarrow{v}}$$

  - Travail d'une force le long de la courbe $\mathcal{C}$ en joules (J) :

$$\boxed{\mathrm{W} = \oint_{\mathrm{C}} \overrightarrow{\mathrm{F}}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}}$$

On peut aussi intégrer la puissance sur la durée du déplacement. **Si la force est constante le long du chemin**, on peut alors utiliser :

$$\boxed{\mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{F}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

Enfin, on remarquera que la définition du travail en physique ne correspond pas toujours à l'intuition. Ainsi un altérophile qui maintient à bout de bras ses altères ne travaille pas. De même qu'une force qui est perpendiculaire au vecteur vitesse. Le théorème de l'énergie cinétique permet de remarquer que travailler signifie faire varier la norme du vecteur vitesse. Une force peut alors faire varier la direction ou le sens de ce vecteur sans pour autant travailler (exemple de la force gravitationnelle pour un mouvement circulaire).
  - L'énergie cinétique en joules :

$$\boxed{\mathrm{E}_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

Remarque : la puissance, l'énergie cinétique et le travail dépend du référentiel (par l'intermédiaire de la vitesse pour la puissance et l'énergie cinétique ou de la trajectoire pour le travail).

— Par définition le travail d'une force conservative s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{-\mathrm{dE}_p = \delta \mathrm{W}}$$

On dit aussi qu'une force conservative dérive d'une énergie potentielle, on peut alors écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{E}_p}$$

On rappelle enfin que l'on dit que ces forces sont conservatives parce qu'elles conservent l'énergie mécanique.
L'énergie potentielle est définie à une constante près, il faut connaître les expressions classiques :

1. Tension d'un ressort : $\mathrm{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \mathrm{C}te$. On peut choisir l'énergie nulle en $\ell = \ell_0$, la constante est alors nulle.
2. Poids d'un point matériel de masse m : $\mathrm{E}_p = mgz + \mathrm{C}te$. Idem en $z = 0$
3. Force de gravitation entre deux masse m_1 et m_2 distantes de r : $\mathrm{E}_p = -\frac{\mathrm{G}m_1 m_2}{r} + \mathrm{C}te$. Cette fois-ci, on choisira la nullité à l'infini.
4. Force électrique entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 distantes de r : $\mathrm{E}_p = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \mathrm{C}te$. Idem.

— L'énergie mécanique est définie par :

$$\boxed{\mathrm{E}_m = \mathrm{E}_c + \mathrm{E}_p}$$

.

II. Principes et théorèmes (En référentiel galiléen)

1. Première loi de Newton : Il existe au moins un référentiel $\mathcal{R}$, dit galiléen, pour lequel le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme.

   Remarques : On ne donne pas concrètement le référentiel galiléen. C'est finalement l'expérience qui nous permet de déterminer si un référentiel est galiléen ou pas. Dans la pratique un référentiel strictement galiléen n'existe pas. Mais dans de très nombreux cas les forces d'inerties d'entraînement et de Coriolis sont négligeables, on peut alors considérer le référentiel comme galiléen avec une bonne approximation (terrestre, géocentrique, de Kepler, de Copernic).

   Ces référentiels sont appelés parfois référentiels inertiels.
2. Deuxième loi de Newton :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathrm{F}} \text{ avec } \overrightarrow{p} \text{ la quantité de mouvement, si la masse est constante : } m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{\mathrm{F}}}$$

3. Principe des actions réciproques. Pour deux points matériels A et B :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}}$$

4. Théorème de la puissance cinétique :

$$\boxed{\frac{d\mathrm{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{P} \text{ est la somme des puissances de toutes les forces extérieures.}}$$

   Cette forme permet d'avoir rapidement l'équation du mouvement dans le cadre d'un mouvement à un seul degré de liberté.
5. Théorème de l'énergie cinétique (version intégrale de la précédente) :

$$\boxed{\mathrm{E}_c(\mathrm{B}) - \mathrm{E}_c(\mathrm{A}) = \mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \text{ où W est le travail de toutes les forces.}}$$

   Entre deux points A et B. On remarquera qu'il suffit de connaitre uniquement la vitesse finale et initiale du mobile.

6. Théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\mathrm{E}_m(\mathrm{B}) - \mathrm{E}_m(\mathrm{A}) = \mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \text{ ici W est le travail des } \textbf{forces non conservatives.}}$$

   On peut bien entendu écrire le théorème de la puissance mécanique sur le même modèle que le théorème de la puissance cinétique, là encore seules les forces non conservatives apparaissent dans les termes de puissance.

7. Théorème du moment cinétique :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}_{ext})}$$

   Dans un référentiel galiléen, O est un point fixe. Dans le cadre de la mécanique du point, ce théorème n'apporte pas plus d'information par rapport aux théorèmes précédents. Il peut permettre une résolution plus rapide dans le cas par exemple de l'existence de forces centrales.

Soient M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2. On note $m = m_1 + m_2$.

III. Système de N points

III.1 Définitions

Rappel : il est toujours possible d'étudier les deux points séparément. Si cette partie du programme vous semble obscure, revenez dessus après avoir étudié la mécanique du solide.

Centre de masse de deux points : il s'agit du point noté G (ou C) définit par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{m_1\overrightarrow{\mathrm{OM}}_1 + m_2\overrightarrow{\mathrm{OM}}_2}{m_1 + m_2}}$$

Référentiel barycentrique (HP) : il s'agit du référentiel en translation à la vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{\mathrm{G}}$ par rapport au référentiel d'étude galiléen. Le référentiel barycentrique n'est pas galiléen a priori. On le note R^*.

De la définition du centre de masse, on en déduit la quantité de mouvement du sytème de deux point par dérivation temporelle :

$$\boxed{(m_1 + m_2)\overrightarrow{v}(\mathrm{G}) = m_1\overrightarrow{v}_1 + m_2\overrightarrow{v}_2}$$

En dérivant cette expression, on obtient alors le principe fondamental pour ces 2 points :

$$\boxed{(m_1 + m_2)\overrightarrow{a}(\mathrm{G}) = m_1\overrightarrow{a}_1 + m_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{\mathrm{F}}_{ext}}$$

Cette expression se généralise à un ensemble de N points et à un solide :

$$\boxed{m\overrightarrow{a}(\mathrm{G}) = \mathrm{F}_{ext}}$$

Le principe fondamental appliqué à un système de N point ou à un solide permet d'avoir simplement accès à la vitesse du centre de masse.

C'est suffisant quand le solide est en translation. Autrement dit l'étude d'un solide en translation peut se ramener à l'étude d'un point matériel G auquel on attribue la masse totale du système.

C'est insuffisant si le système de points est en rotation. Il faut alors utiliser également le théorème du moment cinétique.

IV. Lois de Coulomb

La réaction d'un support s'écrit classiquement :

$$\overrightarrow{\mathrm{R}} = \overrightarrow{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathrm{N}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{T}}$, de norme T est la composante de la réaction tangentielle au mouvement, plus connue sous le nom de frottements solides.

$\overrightarrow{\mathrm{N}}$, de norme N est la composante normale au mouvement.

Si le solide ne glisse pas :

$$\mathrm{T} < f_s \mathrm{N}$$

f_s est le cœfficient de frottement statique.
Si le solide glisse :

$$\mathrm{T} = f_d \mathrm{N}$$

f_d est le cœfficient de frottement dynamique.
Comme f_s et f_d sont très proches, on les confond souvent et on note le cœfficient de frottement simplement f [1].
L'ordre de grandeur typique de f est 10^{-1}. Pour des systèmes qui forttent peu, on peut être à 10^{-2}.

V. Résoudre un problème de mécanique

V.1 Méthode générale

On commence d'abord par définir le référentiel, le système (faire un schéma même si ce dernier est déjà représenté sur le texte du problème) et effectuer un bilan des forces. Ensuite tout dépend de ce que l'on cherche.

A priori le système est décrit par trois coordonnées (x, y, z). On dit qu'il a trois degrés de liberté (ddl). Il faut donc a priori trois équations si l'on souhaite déterminer complètement le mouvement du point. Il est donc important de déterminer le nombre de degrés de liberté.

1. Si le système possède un seul ddl, alors un théorème énergétique permet d'obtenir l'équation du mouvement, dans ce cas il faut utiliser les formes différentielles des équations (théorème de la puissance cinétique par ex).
2. Si on cherche la force de réaction normale. Seule la RFD permet de l'obtenir car c'est une force qui ne travaille pas.
3. Quand il y a plus d'un ddl, il peut être intéressant de combiner théorème énergétique et RFD.
4. Quand j'ai besoin de la vitesse à un instant t connaissant la vitesse initiale, le théorème de l'énergie cinétique qui est un bilan suffit.

Rem : Les théorèmes afférents à l'énergie découlent de la RFD, ils ne peuvent donc pas donner plus d'informations. Il en donne même moins : le théorème de l'énergie cinétique n'est rien d'autre que la projection de la RFD sur la direction du vecteur vitesse à l'instant t (revoir la démo dans le cours de sup). On n'obtient alors que des données dans cette direction.

Enfin, il ne faut pas se sentir contraint par la méthode indiquée, elle doit servir de guide et il faut avant tout réfléchir.

V.2 Loi du moment cinétique

En mécanique du point, il n'apporte pas plus de renseignement que la RFD. Il s'agit là encore d'un théorème qui peut permettre d'avoir plus rapidement certaines informations (très souvent l'équation du mouvement).

Le cas classique est celui du pendule simple : la force de tension du fil est inconnue (c'est une force qui « s'adapte » aux autres ; sinon la corde se détend ou casse). Cette force possède un moment nulle par rapport au point d'attache. On peut alors déterminer rapidement l'équation du mouvement. Bien entendu, l'utilisation du théorème de la puissance mécanique aboutira à la même chose.

1. À noter qu'il existe des situations physiques où il faut les distinguer si on veut expliquer ce qui se passe (crissement d'une craie par ex)

VI. Étude des équilibres

Définition : Un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle et si sa vitesse est nulle [2]

VI.1 Étude énergétique des positions d'équilibre

On se restreint désormais à un point matériel soumis à une somme de force dérivant d'une énergie potentielle. On étudiera qu'un système à un seul degré de liberté noté x.

Une position est alors un position d'équilibre possible si :

$$\boxed{\frac{d\mathrm{E}_p}{\mathrm{d}x}(x = x_0) = 0}$$

Ainsi un point matériel posé avec une **vitesse nulle** en x_0 y reste.

Supposons que l'on écarte le point de sa position d'équilibre :

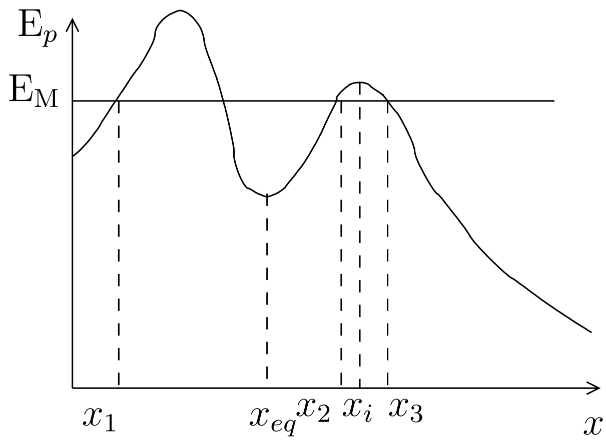
1. Si le point revient en cette position, elle dit stable. Le graphe autour de la position d'équilibre forme une cuvette que l'on appelle **puit de potentiel**.
2. Elle est instable sinon. La courbe forme « une bosse »

Mathématiquement :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}_p}{\mathrm{d}x^2} > 0 \text{ stable } \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}_p}{\mathrm{d}x^2} < 0 \text{ instable.}}$$

Remarque : on peut imaginer que le profil de l'énergie potentielle correspond à un relief sur lequel évolue une bille. Il est intuitivement facile de déterminer la stabilité, l'instabilité . . .

Étude graphique :



D'après le théorème de l'énergie mécanique : $\mathrm{E}_\mathrm{M} = \mathrm{E}_c + \mathrm{E}_p$ et $\mathrm{E}_c > 0$ donc : $\mathrm{E}_p(x) < \mathrm{E}_\mathrm{M} = Cte$. Cette inéquation fixe donc l'intervalle de position dans lequel le point peut évoluer, une fois la position initiale connue.

Dans l'exemple dessiné :

1. Ici si $x(t = 0) \in [x_1, x_2]$, le point reste dans l'intervalle. on dit qu'il est dans un **état lié**.
2. Si $x(t = 0) > x_3$, le point peut partir à l'infini, on dit qu'il est dans un **état de diffusion**.

Autour du point noté x_{eq}, l'équilibre est stable, le point évolue dans un puit de potentiel. Autour du point x_i, l'équilibre est instable : soit le point tombe dans la cuvette de potentiel, soit il part à l'infini.

Pour passer de la position x_1 à une position $x > x_3$ [3], il faut apporter une énergie supérieure ou égale à $\mathrm{E}_{pi} - \mathrm{E}_{p1}$. On dit que le point doit franchir **une barrière de potentiel** [4].

VI.2 Étude du mouvement autour des positions d'équilibre

On notera x_{eq} la position d'équilibre.

Nous allons montrer que autour d'une position d'équilibre stable le mouvement est harmonique (la bille tend à y revenir), autour d'une position d'équilibre instable le mouvement est décrit par une exponentielle croissante (la bille s'éloigne de la position d'équilibre . . . puisqu'elle est instable).

Autour de x_{eq}, on peut effectuer un développement de Taylor au deuxième ordre :

2. On peut à la limite élargir à un vecteurvitesse constant, puisque tous les référentiels galiléen sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.
3. L'énergie mécanique étant supposée suffisamment grande
4. cf l'énergie d'activation en chimie

$$\mathrm{E}_p = \mathrm{E}_p(x_{eq}) + \frac{d\mathrm{E}_p}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq})(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq})(x - x_{eq})^2$$

$$\mathrm{E}_p = \mathrm{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq})(x - x_{eq})^2 = \frac{1}{2}\mathrm{K}(x - x_{eq})^2 + \mathrm{C}te$$

Avec K la dérivée seconde en x_{eq}.
En écrivant la conservation de l'énergie mécanique, on obtient une équation différentielle du type :

$$\ddot{x} + \frac{\mathrm{K}}{m}x = \mathrm{C}te_1$$

Si K est positif, on reconnaît la forme d'une équation harmonique. Le point matériel oscille donc autour de sa position d'équilibre (qui est stable).

Si K est négatif la solution est la somme d'une exponentielle croissante et d'une exponentielle décroissante, le point s'éloigne de sa position d'équilibre (qui est stable).

VII. Mécanique céleste

Il est indispensable de savoir étudier rapidement le mouvement circulaire d'un astre ou d'un satellite artificiel et de savoir calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire. il faut connaître les ordres de grandeurs associés.

Lois de Kepler :

1. Dans le référentiel Héliocentrique, les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.
2. En des temps égaux, le rayon-vecteur Soleil-Planète balaie des aires égales (conséquence de la conservation du moment cinétique).
3. $$\frac{\mathrm{T}^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM_S}}$$

   Cette loi se retrouve très facilement en étudiant le mouvement circulaire.

Énergie :
Si on note $\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r}$, l'énergie mécanique est alors :

$$\boxed{\mathrm{E}_m = -\frac{k}{2a}}$$

Avec a, le demi-grand axe de l'ellipse.
Grâce à la conservation de l'énergie mécanique, on obtient alors facilement la vitesse v.
Important (**mais hors-programme**) :

1. Si $\mathrm{E}_m < 0$ le mouvement est elliptique (circulaire si E_m min)
2. Si $\mathrm{E}_m = 0$, le mouvement est parabolique (cas modèle 0 strict n'existe pas en physique)
3. Si $\mathrm{E}_m > 0$, le mouvement est hyperbolique.

Il faut être capable de calculer rapidement la vitesse d'un satellite en orbite basse (autour de 200 km)) et la première vitesse de libération cosmique (énergie mécanique nulle dans le champ gravitationnel terrestre).

VIII. Les problèmes classiques à savoir traiter

ces problèmes s'ajoutent aux problèmes de mécanique céleste.

1. Chute libre avec vitesse initiale, avec et sans frottements fluides
2. mvt masse-ressort (horizontal, vertical, incliné), avec et sans frottements fluides.
3. mouvement circulaire (pendule, voiture sur piste, esquimau sur igloo ...)
4. mouvement circulaire en astronomie et mouvement elliptique à l'aide de la conservation de l'énergie.
5. mouvement conservatif à 1 ddl, équilibre, stabilité, étude autour de l'équilibre.
6. mouvement d'une particule chargée dans $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$.
7. mouvement masse-ressort forcé par une force sinusoïdale (avec et sans frottements fluides), parallèle avec le RLC série.

IX. Solide en rotation autour d'un axe fixe

IX.1 Définition

On appelle **couple** une action mécanique dont la résultante est nul, mais dont le moment est non nul. On note souvent $\overrightarrow{\Gamma}$ ce moment et on l'appelle souvent par abus de langage le couple qui s'exerce sur l'objet.

Liaison pivot : une liaison pivot d'axe Oz est une liaison qui restreint le mouvement du solide à une rotation autour de l'axe Oz.

Si la liaison est dite **pivot parfait** alors le moment des actions de liaison est nul ainsi que la puissance de ces actions.

IX.2 Expression du moment cinétique scalaire

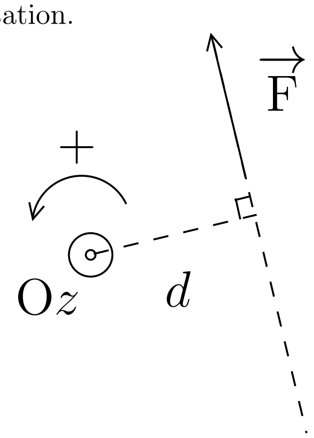
Soit Oz l'axe de rotation du solide tournant à la vitesse ω et J son moment d'inertie alors :

$$\boxed{\mathrm{L}_z = \mathrm{J}\omega}$$

J dépend de la masse (et de sa répartition) ainsi que la distance à l'axe. J est d'autant plus grand que les masses sont éloignées de l'axe de rotation.

IX.3 Bras de levier

On considère le cas où la force qui s'exerce sur le solide en rotation est dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation.



Si on connaît sans ambiguité le sens de la force :

— Si la force fait tourner l'objet dans le sens positif alors : $\mathcal{M}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = +\,||\overrightarrow{\mathrm{F}}\,|| \times d$

— Si la force fait tourner l'objet dans le sens positif alors : $\mathcal{M}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = -\,||\overrightarrow{\mathrm{F}}\,|| \times d$

— Si on ne connaît pas le sens de la force, on raisonne avec $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ dans le sens positif (Ox par exemple) : $\mathcal{M}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = \mathrm{F}_x \times d$, F_x projection de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ sur Ox.

On voit alors que si F_x est effectivement positive, le moment est positif et que si F_x est négatif, le moment est négatif.

IX.4 Théorème de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est $\frac{1}{2}\mathrm{J}\omega$. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{d\left(\frac{1}{2}\mathrm{J}\omega^2\right)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{\omega} = \mathcal{M}_z.\omega}$$

Avec $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ la somme des moments exérieurs qui s'exercent sur le système.

Le thérorème de l'énergie cinétique est alors entre deux points A et B repérés par les angles α_{A} et α_{B} :

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathrm{J}\omega^2(\mathrm{B}) - \frac{1}{2}\mathrm{J}\omega^2(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathcal{M}_z.\mathrm{d}\alpha}$$

Si le moment est constant :

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathrm{J}\omega^2(\mathrm{B}) - \frac{1}{2}\mathrm{J}\omega^2(\mathrm{A}) = \mathcal{M}_z.(\alpha(\mathrm{B}) - \alpha(\mathrm{A}))}$$

X. Énergie d'un système déformable

X.1 Énergie

Si le système est déformable il faut prendre en compte les forces intérieures dont on ajoute le travail ou la puissance aux théorèmes déjà rencontrés :

$$\boxed{\frac{d\mathrm{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext} \text{ et } \Delta\mathrm{E}_c = \mathrm{W}_{int} + \mathrm{W}_{ext} \text{ idem pour } \mathrm{E}_m}$$

Si le système est indéformable, la puissance des forces intérieures est nulle.