TD n°6 : Phénomènes ondulatoires unidimensionnels

I. Questions cours

1. Dans le cas de la propagation d'une onde dans un solide, expliquer le passage de la représentation discrète à la représentation continue.
2. Donner l'expression du module d'Young.
3. Donner l'expression vectorielle de la tension du ressort.
4. Donner l'équation de D'Alembert pour un système unidimensionnel.
5. Donner les solutions générales de l'équation de D'Alembert à une dimension. Sens physique ?
6. Définir une OPH.
7. Définir vitesse de phase, relation de dispersion.
8. Donner la forme des ondes stationnaires
9. Expliquer la construction des solutions de l'équation de D'Alembert à l'aide des modes propres.
10. Pourquoi faut-il accrocher un pack d'eau à une guitare ?
11. Expliquer le comportement d'une corde soumise à des oscillations forcées.
12. Donner l'expression d'une onde sphérique.
13. Quelles équations relient deux grandeurs couplées qui se propagent ? (2 équations différentielles et deux autres).

II. Vrai, Faux, Ben pourquoi ?

1. Le son émis par un élastique ne varie quasiment pas lorsqu'on le déforme [1]. Pourquoi ?
2. Une onde harmonique peut être réprésentée par n'importe quelle fonction si elle est $\mathcal{C}^2$?
3. La longueur d'onde dépend du référentiel.
4. La tension est uniforme dans une corde verticale de masse m.
5. Une corde sous tension permet d'obtenir une horizontale parfaite.
6. Le son se propage moins vite dans l'acier que dans l'air car l'acier est plus dense.
7. Une onde quelconque peut toujours se décomposer en somme discrète de sinus et de cosinus.

III. Animation d'une onde progressive ♪

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation
T,lbd=1,1 # période et longeur d'onde
k = 2*np.pi/lbd # pulsation spatiale
w = 2*np.pi/T # pulsation
dt = 0.01 # durée entre deux images
#
xmin,xmax,Nx = 0,3,100 # valeurs de x (min, max, nb de points)
x = np.linspace(xmin, xmax, Nx)
#
fig=plt.figure() # initialisation de la figure
line, = plt.plot([],[])
```

1. Ce n'est généralement pas le cas lors d'un saut à l'élastique, du moins pour l'une des extrémités

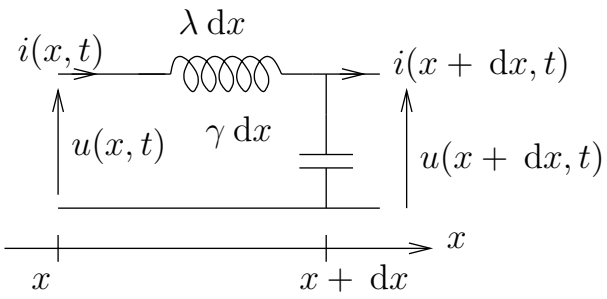
```
plt.xlim(xmin, xmax)
plt.ylim(-1,1)
#
def animate(i)
t = i * dt
y = np.cos(k*x - w*t)
line.set_data(x, y)
return line,
#
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=100, interval=20, repeat=True)
#
plt.show()
```

:

Que fait ce code ? Animer alors une onde régressive harmoique en s'inspirant de ce dernier. Idem avec une onde non harmonique de votre choix.

IV. Câble coaxial ♪

Un câble coaxial peut être modélisé par une succession de cellules élémentaires représentant la portion $(x, x+\mathrm{d}x)$ du câble où λ est l'inductance par unité de longueur du câble et γ sa capacité par unité de longueur.



1. À quelle condition l'élément $\mathrm{d}x$ peut-il s'étudier dans l'ARQS ?
2. Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par $i(x,t)$ et par $u(x,t)$. Que peut-on en déduire ?
3. On suppose que i est une onde progressive, comment s'écrit-il ?
4. En déduire que :

$$u(x,t) = \lambda c f(x-ct) + \mathrm{C}te$$

   Justifier que l'on puisse choisir la Cte nulle.
5. En déduire l'expression de $u(x,t)$ en fonction de $i(x,t)$ et de l'impédance caractéristique du câble, définie par $\mathrm{Z}_c = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\gamma}}$.
6. Quelle est alors la relation entre i et u si i est une onde régressive ?
7. En déduire la relation entre i et u si i est la superposition d'une onde régressive et d'une onde progressive.

V. Câble coaxiale en régime forcé ♪♪

Cet exercice est la suite du précédent, le schéma de fonctionnement est le même. Il faut avoir traité l'exercie précédent avant d'aborder celui-ci.

1. Le câble s'étend de $x = 0$ à $x = \mathrm{L}$. On branche en $x = 0$ un générateur de tension délivrant la f.é.m. $e(t) = \mathrm{E}_0 \cos \omega t$.
   a) L'extrémité $x = \mathrm{L}$ est ouverte. Déterminer $i(x,t)$ et $u(x,t)$ en régime sinusoïdal forcé.
   b) Définir et calculer l'impédance d'entrée du câble.

2. Le câble est fermé sur une résistance R. Déterminer entièrement $i(x,t)$ et $u(x,t)$ en régime sinusoïdal forcé. Commenter. Montrer en particulier qu'on peut annuler l'onde réfléchie en choisissant la bonne valeur de R. Exprimer dans ce cas la puissance moyenne transportée par l'onde à l'abscisse $x = \mathrm{L}$. Commenter.

VI. Câble coaxial : énergie qui se propage♪

On considère toujours le modèle de câble abordé dans l'exercice IV.

1. Quelle est l'énergie stockée dans le morceau de câble compris entre x et $x + \mathrm{d}x$? En déduire l'expression de l'énergie linéique e.
2. Faire un bilan local d'énergie sur la tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$. En déduire :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0 \text{ avec } \mathcal{P} = u.i$$

Commenter.

VII. Énergie stockée dans une corde ♪♪

Il est conseillé de faire les exercices sur le câble coaxial avant d'aborder celui-ci.
On considère un élément de corde de longueur $\mathrm{d}x$ sans raideur, de masse linéique μ.

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique linéique de la corde.
2. Il s'agit ici de montrer que la déformation de la corde est associée à une énergie potentielle.
   a) On considère la déformation de l'élément de longueur $\mathrm{d}x$ au repos. Montrer que lorsque la corde est en mouvement, il est de longueur :

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

   b) Justifier que le travail exercé par un opérateur pour déformer la corde est :

$$\delta \mathrm{W} = \mathrm{T}_0.(\mathrm{d}\ell - \mathrm{d}x)$$

   c) En déduire par un calcul au premier ordre l'expression de l'énergie potentielle linéique stockée dans la corde.
3. Donner l'expression de la puissance transmise de la gauche vers la droite de la corde.
4. Faire un bilan d'énergie.
5. On suppose qu'une onde progressive se propage sur la corde :

$$v_y = f(x - ct)$$

En déduire la relation entre T_y et v_y, on introduira la grandeur $\mathrm{Z} = \sqrt{\mu \mathrm{T}_0}$, impédance caractéristique de la corde.

6. Montrer que l'énergie linéique en fonction de f s'écrit :

$$e = \mu f^2(x - ct)$$

Montrer qu'il y a équipartition de l'énergie.

7. Montrer que la puissance transférée s'écrit :

$$\mathcal{P} = e(x,t)c$$

8. Soit v la vitesse de propagation de l'énergie. Par un bilan d'énergie sur un cylindre de longueur $v\,\mathrm{d}t$, montrer que l'énergie se propage à la vitesse c.

VIII. Influence de la raideur d'une corde sur la fréquence de ses vibrations ♪♪

Une corde, de masse linéique μ, de longueur L, fixée à ses extrémités, soumise à une tension T_0 vibre dans le mode propre d'ordre n suivant la loi :

$$\psi(x,t) = A\cos\omega_n t \sin n\frac{\pi x}{L} \text{ avec n entier.}$$

Aux hautes fréquences, il faut tenir compte de la raideur de la corde. Dans le bilan des forces qui s'exercent sur un élément de corde de longueur dx, cela revient à rajouter une force supplémentaire $d\overrightarrow{R}$ qui tend à s'opposer à la courbure de la corde, et dont la projection sur l'axe (Oy) s'écrit :

$$dR_y = -\gamma\frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}dx,$$

où γ est une constante dépendant du matériau constituant la corde et α, l'angle entre l'horizontal et la tangente à la corde défini comme dans le cours.

1. Calculer le rapport ε du module de dR_y au module de la composante sur (Oy) de la résultante de la force de tension qui s'exerce sur l'élément de corde de longueur dx.
2. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un élément de corde de longueur dx.
   En déduire la pulsation ω_n de la vibration de la corde en fonction de $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, L, ε et n.
3. Calculer la correction relative de la pulsation associée au mode n, introduite par la prise en compte des effets de la raideur (on supposera $\varepsilon \ll 1$). Faire l'application numérique pour $n = 1$, 2 et 10.
   Données : $L = 0,5$ m ; $T = 387$ N ; $\gamma = 10^{-2}$ N.m^2.

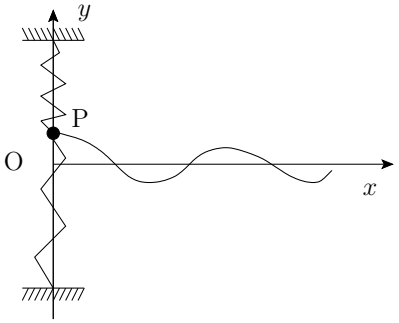
IX. Adaptation d'impédance ♪♪

Une corde horizontale, de masse linéique μ, est fixé en A. Elle est tendue avec une tension T_0 et plombée au point O d'abscisse $x = 0$ par un point matériel de masse m. Le point A se situe en $x = d$. La corde est supposée semi-inifinie du côté x négatifs. Une OPH de pulsation ω est générée du côté des x négatifs. On suppose que, lors de son déplacement transverse, la masse m subit la force de frottement $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$. On néglige l'action de la pesanteur.

1. En étudiant les ondes qui se propagent le long de la corde, préciser les conditions pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie en O.
2. Montrer que l'on retrouve une des deux conditions précédentes par des considérations énergétiques.

X. Corde vibrante excitée par deux ressorts ♪♪

On étudie le dispositif ci-contre. Le point P se déplace sans frottement sur l'axe vertical Oy. Les deux ressorts sont identiques (raideur k, longueur à vide ℓ_0). Quand le point matériel P, de masse m se trouve en O, leurs actions se compensent exactement. À l'instant $t = 0$, la corde (de masse linéique μ, de longueur infinie) est horizontale, elle est tendue avec la tension T_0. Le point P se trouvant en O, on lui communique la vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{u_y}$. On pourra négliger son poids.



1. Étudier le mouvement de P.
   On posera $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ et $\lambda = \frac{T_0}{2m\omega_0 c}$ où c est la célérité des ondes sur la corde. On suppose $\lambda < 1$.
2. Dessiner la corde à l'instant t.

XI. Propagation en présence de forces extérieures ♪♪

On étudie les petits mouvements dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ d'une corde métallique de longueur L, fixée en en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = \mathrm{L}$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 \cos \omega t$ et plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0 \sin \dfrac{\pi x}{\mathrm{L}} \overrightarrow{u_y}$ On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Montrer que le déplacement $z(x,t)$ d'un point de la corde est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme :
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{I}_0 \mathrm{B}_0}{\mu} \cos \omega t \sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)$$
où c est une constante qu'on exprimera en fonction des données.
2. En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x,t) = \mathrm{C} \sin(\dfrac{\pi x}{\mathrm{L}}) \cos \omega t$. Déterminer C. Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\dfrac{\pi c}{\mathrm{L}}$?

XII. Modes propres d'un ressort (oral mines) ♪♪

On considère un ressort horizontal de longueur à vide L dont une extrémité est fixée en O et dont l'extrémité mobile M est reliée à une masse ponctuelle m libre se déplaçant sans frottements le long de l'axe Ox. On note μ la masse linéique du ressort. On repère le mouvement d'une spire située à l'abscisse x au repos par sa position $x + \xi(x,t)$. Si on coupe fictivement le ressort à l'abscisse x, la force exercée par la partie droite sur la partie gauche est donnée par : $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \kappa \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \overrightarrow{u_x}$ où κ est une caractéristique du matériau.

1. Montrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert et exprimer la célérité c correspondante.
2. On fait l'approximation des régimes quasi-stationnaires, c'est à dire qu'on néglige les dérivées temporelles dans l'équation de d'Alembert. On note $\mathrm{L} + \mathrm{X}(t)$ la position de la masse m.
   a) Déterminer $\xi(x,t)$ en fonction de x, $\mathrm{X}(t)$ et L.
   b) En déduire la force exercée par le ressort sur m en fonction de κ, L et X. En déduire la raideur k du ressort en fonction de κ et L.
   c) Déterminer la pulsation ω_{arqs} des oscillations. en déduire une condition sur μ, L et m pour que l'ARQS soit validée.
3. On revient au cas général.
   a) Quelles sont les conditions aux limites imposées à la fonction $\xi(x,t)$ d'une part par le mur en $x = 0$ et d'autre part par la masse m en $x = \mathrm{L}$?
   b) On cherche des solutions de la forme : $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$.
   Établir l'équation dont est solution $f(x)$ et déterminer sa forme à une constante multiplicative près en fonction de ω, x et c.
   c) Montrer que ω est solution de : $\tan\left(\dfrac{\omega \mathrm{L}}{c}\right) = \dfrac{\kappa}{m\omega c}$. Discuter graphiquement des solutions de cette équation.
   d) On suppose que $\mu \mathrm{L} \ll m$ et $\omega_1 \ll c/\mathrm{L}$. En utilisant le développement limité $\tan(u) \approx u + u^3/3$, déterminer ω_1 à l'ordre 1 en $\mu\mathrm{L}/m$ en fonction de κ, μ, L et m. Vérifier que tout se passe comme si on accrochait à un ressort sans masse une masse ponctuelle fictive $m^* = m + \alpha\mu\mathrm{L}$ où α est un nombre à déterminer.

XIII. Bouchon automobile, équation de Burgers ♪♪

On décrit la circulation automobile sur une autoroute d'axe Ox s'étendant entre $x = -\infty$ et $x = +\infty$ par le nombre d'automobiles $n(x,t)$ par unité de longueur et le débit d'automobiles $\mathrm{D}(x,t)$ tel que le nombre d'automobiles qui traversent une section d'abscisse x pendant $\mathrm{d}t$ dans le sens des x croissants vaut $\delta \mathrm{N} = \mathrm{D}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Un bouchon

se forme à l'instant t en tout point où $n(x,t)$ dépase la valeur n_{M}. en revanche si $n(x,t) \leqslant n_{\mathrm{M}}$ en tout point, la circulation est fluide. L'enjeu du modèle est de savoir si ,la circulation étant fluide à l'instant t, elle le reste ultérieurement.

1. En faisant un bilan du nombre d'automobiles sur le système ouvert et fixe compris à chaque instant entre x et $x + \mathrm{d}x$, établir la relation :
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x} = 0$$
2. On suppose dans cette question que la vitesse des automobiles est une constate c_0. en déduire que $n(x,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial n}{\partial t} + c_0 \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$
Vérifier que toute fonction $n(x,t) = f(x - c_0 t)$ est solution de cette équation d'onde et interpréter physiquement. On admet dans la suite qu'il s'agit de la solution générale de cette équation. Dans le cadre de ce modèle, est-il possible d'interpréter l'apparition d'un bouchon à partir d'une situation initiale fluide ?
3. On affine désormais le modèle de la circulation automobile en supposant que la vitesse c des automobiles est une fonction affine décroissante de la concentration n, ce qu'on écrit :
$$c = \left(1 - \frac{n}{n_{\mathrm{M}}}\right) c_0 \text{ pour } 0 \leqslant n \leqslant n_{\mathrm{M}}$$
Alors que pour $n \geqslant n_{\mathrm{M}}$ on a $c = 0$ de telle sorte qu'il se forme un bouchon.
   a) Montrer que le débit $\mathrm{D}(n)$ passe par un maximum pour une valeur n_{max} de n que l'on exprimera.
   b) Établir la nouvelle équation aux dérivées partielles (équations de Burgers) dont est solution $n(x,t)$:
$$\frac{\partial n}{\partial t} + c_0 \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{c_0}{n_{\mathrm{M}}} \frac{\partial n^2}{\partial x} = 0$$
   c) Pourquoi la méthode de superposition d'OPH ne peut-elle pas convenir pour résoudre cette équation ?
   d) Des simulations montrent que cette équation permet de prévoir l'apparition de bouchon à partir d'une situation initiale où la circulation est fluide. On se propose d'interpréter ce résultat en linéarisant l'équation précédente au voisinage d'un état uniforme $n(x,t) = n_0 < n_{\mathrm{M}}$. On pose donc $n(x,t) = n_0 + \varepsilon(x,t)$ et on limite les calculs à l'ordre un en ε. Montrer que ε est solution de l'équation :
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + c_0 \left(1 - 2\frac{n_0}{n_{\mathrm{M}}}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$
Quelle est la vitesse de propagation de l'onde progressive solution de cette équation ? Justifier alors la possibilité d'engendrer un bouchon à partir d'une situation initiale fluide.

XIV. Réflexion sur une corde tendue ♪♪

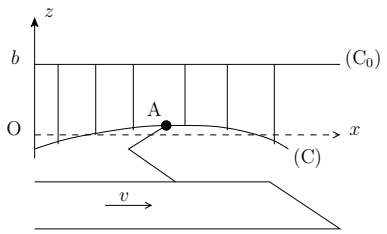
Une corde de masse linéique μ est tendue avec une tension T_0. On néglige les effets de la pesanteur.

La corde est supposée semi-infinie et s'étend de $-\infty$ à $x = 0$. Une onde transversale s'y propage dans le sens des $x > 0$. Son équation est représentée par la fonction $y_i(x,t) = \mathrm{F}(t - x/c)$. Déterminer l'élongation réfléchie $y_r(x,t)$ quand :

1. L'extrémité $x = 0$ peut coulisser sans frottement sur $\mathrm{O}y$.
2. L'extrémité $x = 0$ est fixée en O.

XV. Rupture de l'alimentation électrique d'un TGV ♪♪♪

Ces dernières années, la vitesse de croisière des TGV a régulièrement augmenté. Pour continuer à augmenter cette vitesse, les ingénieurs de la SNCF sont confrontés au problème de la rupture de contact entre la ligne d'alimentation et le pantographe. C'est ce phénomène que nous proposons d'étudier ici.



On modélise le système d'alimentation en électricité du TGV de la manière suivante :
— Un câble (C) de masse linéique μ, tendu avec une tension constante T_0, est suspendu par des petits câbles verticaux à un autre câble horizontal (C_0), supposé indéformable et confondu avec la droite Bx d'équations $(z = b, y = 0)$ d'un référentiel galiléen auquel on associe la base $(Oxyz)$;
— On néglige l'influence de la pesanteur sur la forme des câbles ;
— Au repos, le câble (C) est confondu avec l'axe Ox ; on repère son mouvement quasi-vertical par la cote $z(x,t)$ de l'élément de câble situé au repos au point d'abscisse x de l'axe Ox ; on suppose que le câble reste peu incliné par rapport à l'horizontale ;
— du fait de l'élasticité des câbles verticaux, un élément dx du câble (C) subit de la part du support une force de rappel de la forme $\overrightarrow{dF} = -kz(x,t)\,dx\overrightarrow{u_z}$ où $k > 0$;

1. Montrer que $z(x,t)$ est solution d'une équation d'onde de la forme :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{z}{\delta^2}$$

Exprimer, c et δ, vérifier la pertinence du résultat sur le cas particulier $k = 0$ et interpréter la constante c.

2. Le TGV est supposé en mouvement uniforme de vitesse $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$ avec $v < c$. Tant que $z(x = vt, t)$ reste inférieur à une valeur critique z_M, le TGV appuie sur le câble (C) via un bras articulé, au point A d'abscisse $x_A = vt$ et de cote $z(vt,t)$ et exerce sur le câble une force $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_z}$; si $z(x = vt, t) > z_M$ le contact câble-bras est rompu et l'alimentation est interrompue

   a) On cherche une solution à l'équation (E) de la forme $z(x,t) = f(u)$ avec $u = x - vt$. Interpréter qualitativement ce choix. Montrer que $f(u)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à constants.

   b) En déduire la forme de $f(u)$ à une constante multiplicative A près, d'une part pour $u > 0$ et d'autre part pour $u < 0$. On posera $\Delta = \delta\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Représenter sur une figure l'allure du câble à t fixé.

3. Le contact ente le bras et le câble se traduit par la condition aux limites :

$$F = -T_0\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{u=0^+} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{u=0^-}\right) - \mu v\left(\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{u=0^+} - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{u=0^-}\right)$$

   a) Tester la pertinence de cette expression sur le cas particulier $v = 0$. Interpréter sans calcul l'existence du terme complémentaire lorsque $v \neq 0$.

   b) Montrer que :

$$A = \frac{F\delta}{2T_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

   Interpréter l'existence d'un risque de rupture de l'alimentation électrique du TGV. Pour quelle vitesse se produit la rupture sachant que $z_M \gg F\delta/T_0$?

   c) On donne $\mu = 1,4$ kg.m^{-1}. Quelle tension minimale T_m faut-il appliquer pour que le TGV puisse rouler à la vitesse du record d'avril 2007 [2] : 574,8 km.h^{-1}sans risque de perte du contact pantographe/câble ?

XVI. Oscillations d'un ressort (Centrale) ♪♪♪

Une masse M peut glisser sans frottement sur un axe horizontal. Elle est attachée à un resort de masse linéique μ dont l'autre extrémité est fixée au point O. À l'équilibre la longueur du ressort est ℓ, sa raideur k. Chaque point du ressort est alors repéré par son abscisse x, et on notera $y(x,t)$ l'élongation de ce point comptée à partir de la position précédente.

1. On désir établir l'équation du mouvement en $y(x,t)$. À cet effet on demande de modéliser le ressort massique par un système discret constitué de petits ressorts (sans masse) et de masses ponctuelles. En étudiant le mouvement de la n^e masse déterminer l'équation de propagation. En déduire la célérité des ondes se propageant le long du ressort.

2. En réalité la tension a été portée à 4 tonnes, sur une ligne classique elle est égale à 2,9 tonnes

On cherche des solutions au problème du ressort massique et de la masse M sous la forme d'ondes stationnaires :

$$y(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi)$$

Montrer que les valeurs possibles de ω constituent une suite de valeurs discrètes. Proposer quelques cas particuliers.

XVII. Résolution de problème : Lames vibrantes

Prenez un objet plat et mince, par exemple une règle d'au moins 30 m. Posez-en un bout bien plat sur la table, et maintenez-le fermement avec une main. Laissez dépasser l'autre bout, et faites-le vibrer avec l'autre main.

Faites varier les différents paramètres sur lesquels vous pouvez jouer, et déterminer lesquels influent sur cette fréquence.

XVIII. Vibrations longitudinales d'une lame de céramique ♪

On étudie les petits mouvements de déformation le long de l'axe horizontal Ox d'une lame de céramique de section S (perpendiculairement à l'axe Ox) et de masse volumique μ_0. À l'équilibre, la pression est uniforme dans la lame, égale à P_0. À l'instant t, un plan d'abscisse x au repos se trouve à l'abscisse $x+y(x,t)$, sa vitesse vibratoire est $u(x,t)$. On néglige tout effet lié à la pesanteur.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la force de traction T permettant à la lame de section S et de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $\mathrm{T} = \mathrm{ES}\dfrac{\Delta \mathrm{L}}{\mathrm{L}}$ où E est le module de Young du matériau.

1. Montrer qu'à l'abscisse x, à l'instant t, la force de traction que la partie droite de la lame exerce sur la partie gauche est $\mathrm{T}(x,t) = \mathrm{ES}\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)$
2. Écrire l'équation du mouvement d'une tranche de lame située au repos entre les plans d'abscisses x et $x+\mathrm{d}x$. En déduire que la déformation $y(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert à une dimension. Quelle est la célérité c des ondes ?
3. Application numérique : calculer c pour une lame de masse volumique :$\mu_0 = 3400$ kg.m^{-3}, de module de Young $\mathrm{E} = 8,0.10^{10}$ N.m^{-2}.
4. Donner sans démonstration la forme des solutions de cette équation. Interpréter chaque terme.

XIX. Corde de piano (Centrale 2016, merci à BEOS) ♪♪♪

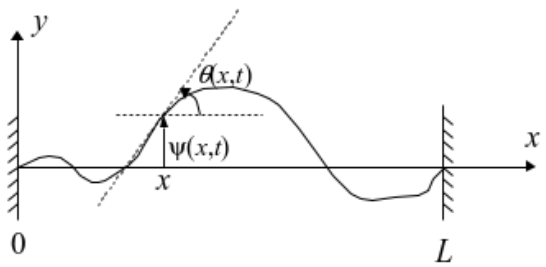
On étudie ici les vibrations des cordes d'un piano.

On considère donc une corde vibrante de longueur L, de masse linéique μ, sans raideur, fixée en ses deux extrémités.

Le poids de la corde sera négligé.

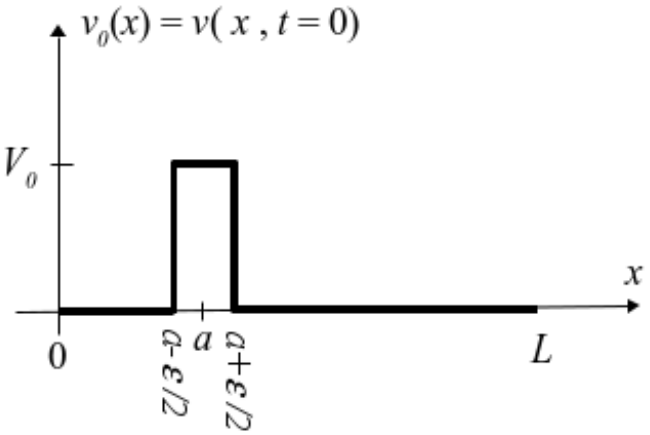
Au repos, la corde est confondue avec la portion de l'axe Ox allant de $x = 0$ à $x = \mathrm{L}$.

En mouvement, la corde vibre dans le plan Oxy. On supposera que l'angle $\theta(x,t)$ qu'elle fait en tout point avec la direction $x'x$ reste petit (condition non respectée sur le dessin ci-dessous), et on note $\psi(x,t)$ son élongation transversale.



1. Démontrer que la tension de la corde est uniforme tout le long de la corde. On la notera T.

2. Démontrer l'équation vérifiée par l'élongation $\psi(x,t)$:
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$
Déterminer l'expression de c. Que représente cette grandeur ? Quelle est sa dimension ? Comment s'appelle cette équation ?
3. On cherche une solution sous la forme $\psi(x,t) = f(x)\sin(\omega t)$. Déterminer l'expression de $f(x)$.
4. Donner les conditions aux limités vérifiées par $f(x)$ et en déduire que la pulsation ω ne peut prendre que des valeurs discrètes ω_n.
5. Représenter les trois premiers modes propres de vibration de la corde.
6. On considère que le marteau, qui frappe la corde de piano lorsque le pianiste appuie sur la touche, donne à la corde, à l'instant initial $t = 0$



On suppose que l'élongation peut se mettre sous la forme :
$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{B}_n \sin(\omega_n t)\sin\left(\frac{n\pi}{\mathrm{L}}x\right)$$
Déterminer alors l'expression de la vitesse $v(x,t) = \dfrac{\partial\psi}{\partial t}$.
7. Montrer que la connaissance de la vitesse initiale $v_0(x) = v(x, t=0)$ permet de déterminer les B_n en décomposant en série de Fourier une fonction que l'on précisera et dont on donnera la période.
8. On donne l'expression des coefficients de Fourier d'une fonction $g(x)$ impaire et périodique :
$$\mathrm{B}_n = \frac{2}{\text{période}}\int_0^{\text{période}} g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\mathrm{L}}x\right)dx$$
Calculer les B_n pour le problème qui nous intéresse. En déduire l'expression de $v(x,t)$.
9. Montrer que, en fonction de la position où le marteau frappe la corde de piano, on obtient des harmoniques différentes.
10. Vous disposez d'un programme python (dispo sur cahier de prépa) qui :
— représente graphiquement, sous forme animée, les vibrations de la corde,
— trace sous forme d'un diagramme en barres les coefficients(avec n en abscisse).
Les seules données que vous pouvez modifier sont les valeurs de a et de ε (lignes 25 et 26). Modifier a dans le programme pour éliminer l'harmonique $n = 7$.
11. Rappeler le lien qui existe entre f_1, fréquence fondamentale de la corde, et sa longueur L.
12. Pour un piano, les notes vont du La_0 ($f_1 = 28$ Hz) au Do_8 ($f_1 = 4{,}2$ kHz). Sachant que pour le La_3 ($f_1 = 220$ Hz), la longueur de la corde est L = 65 cm, déterminer la longueur des cordes extrêmes.
13. En réalité, pour des raisons d'encombrement, on se limite, pour un piano à queue, à L = 3 m environ au maximum. Pour quelles notes (aigües ou graves) cela pose-t-il un problème ? Pour ces notes, on enroule un fil de cuivre autour de l'acier des cordes (dites alors « cordes filées »). Quel est l'intérêt de ce filage ? Pourrait-on jouer sur d'autres paramètres ?

14. La corde d'acier est modélisée comme un cylindre de diamètre $d = 1,6$ mm. Elle est recouverte de manière uniforme par une couche de cuivre d'épaisseur 1 mm. La tension est T = 850 N. Quelle est la longueur de la corde qui joue le La_0 ?

Données :
masse volumique du cuivre $\rho_{Cu} = 7800$ kg.m^{-3}
masse volumique de l'acier $\rho_{acier} = 9000$ kg.m^{-3}