# TD n°7 : Propagations des ondes électromagnétiques dans le vide

## I. Tadashii/Chigau

1. La notation complexe est valable pour les ondes planes.
2. En notation complexe div est équivalent à $-j\overrightarrow{k}\wedge$
3. Une onde plane électromagnétique est telle que $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ avec la norme de $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ $c$ fois plus grande que celle de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$
4. L'énergie électromagnétique est toujours transportée à la vitesse $c$.
5. Une polarisation circulaire peut se décomposer en deux polarisations rectilignes
6. Une polarisation rectiligne peut se décomposer en deux circulaires.
7. Expliquer l'éclat métallique.
8. Comment fabriqueriez-vous une alarme volumétrique (ie qui protège un volume) ? Quelle longueur d'onde utiliser ?

## II. Étude d'une onde électromagnétique (application directe du cours)

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$.
2. On suppose que $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x}$.
   a) À quelle équation doit satisfaire $k$ pour que ce champ soit solution de l'équation rappelée à la question 1 ?
   b) Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?
   c) Quel est son état de polarisation ?
   d) Quelle est sa structure ?
   e) Calculer le champ magnétique et le vecteur de Poynting.
3. La puissance moyenne rayonnée par l'onde à travers une surface $\mathrm{S} = 4$ mm$^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $\mathrm{P} = 10$ W. Calculer les amplitudes $\mathrm{E}_0$ et $\mathrm{B}_0$.
4. On suppose maintenant que l'onde étudiée possède un champ électrique qui est :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{E}_y\overrightarrow{u_y} \qquad \text{avec } \mathrm{E}_x = \mathrm{E}_0\exp\left(i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z) - \omega t\right)\right)$$

   L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6.10^{-7}$ m.
   a) Calculer la fréquence de l'onde.
   b) Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
   c) Calculer numériquement $k$.
   d) Exprimer $\mathrm{E}_y$ en fonction de $\mathrm{E}_x$.
   e) Établir l'équation cartésienne d'une surface d'onde.
   f) Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ de cette onde.
   g) Calculer la densité moyenne d'énergie associée à cette onde en utilisant les espressions des champs établies précédemment.
   h) Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle en utilisant les expressions des champs établies précédemment. Commenter.

## III. Étude de la structure d'un champ ♪

On considère le champ électromagnétique dont le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ associé s'écrit dans le vide :

$$\mathrm{E}_x = 0 \qquad \mathrm{E}_y = \mathrm{E}_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp j(\omega t - kz) \qquad \mathrm{E}_z = \alpha \mathrm{E}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp j(\omega t - kz)$$

1. De type d'onde s'agit-il ? À quelle condition sur $\alpha$ peut-il être le champ électrique d'une onde électromagnétique ? On utilisera une équation de Maxwell pour répondre et cette condition sera conservée dans dans toute la suite. Peut-on définir la polarisation de l'onde ?
2. Calculer le champ magnétique associé, puis le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie de l'onde. Exprimer les moyennes temporelles de ces quantités énergétiques.
3. Déterminer la relation de dispersion (relation entre $k$ et $\omega$). Tracer $k = f(\omega)$. La propagation est-elle possible quelle que soit la pulsation ?

## IV. Onde polarisée circulairement. ♪

Un onde plane plane progressive polarisée circulaire droite se propage dans le vide.

1. Expliciter les champs électrique et magnétique.
2. Calculer le vecteur de Poynting.
3. Montrer qu'une onde polarisée rectilignement peut s'écrire comme la somme de deux ondes polarisées circulairement.

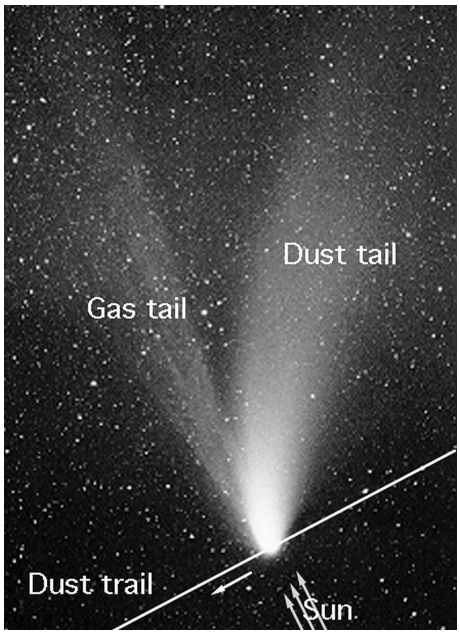
## V. Modes propres d'une cavité sans pertes, (Centrale 2001) ♪

Une cavité sans perte d'axe O$x$ et de longueur L est constituée par l'association de deux miroirs métalliques parfaits confondus respectivement avec les plans $x = 0$ et $x = \mathrm{L}$. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électrique d'une onde monochromatique polarisé selon $\overrightarrow{u_z}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(x,t) = \mathrm{E}_1 \exp(i(\omega t - kx))\overrightarrow{u_z} + \mathrm{E}_2 \exp(i(\omega t + kx))\overrightarrow{u_z}$$

1. Quelles sont les conditions aux limites imposées par la présence d'un métal parfait en $x = 0$ et $x = \mathrm{L}$ ?
2. En déduire l'expression de $\mathrm{E}_2$ en fonction de $\mathrm{E}_1$ et la suite $f_n$ des valeurs possibles de la fréquence de telles ondes pouvant exister dans la cavité. Comment peut-on appeler les champs dont la fréquence vaut $f_n$ ?
3. a) Établir l'expression $\overrightarrow{\mathrm{E}}_n(x,t)$ du champ électrique dans la cavité de fréquence $f_n$ en fonction de $\mathrm{E}_1$, $n$, $x$, L et $c$.
   b) Comment appelle-t-on ce type d'onde ? Pourquoi ?
   c) Calculer la position des nœuds du champ et donner la distance entre deux nœuds consécutifs.
   d) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}_n(x,t)$ associé à l'onde. Calculer la position des nœuds du champ magnétique.

## VI. Orientation de la queue des comètes ♪♪




Soit une onde plane, monochromatique, de fréquence $\nu$, se propageant dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_x}$, dont le champ électrique est $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$. On rappelle que l'éclairement I est la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

1. Exprimer I en fonction de $\varepsilon_0$, $c$ et $\mathrm{E}_0$
2. On considère cette onde comme un faisceau de photons se propageant dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_x}$. L'énergie d'un photon associé à cette onde est $h\nu$ et sa quantité de mouvement $\dfrac{h\nu}{c}\overrightarrow{u_x}$
   a) Exprimer le nombre $n_0$ par unité de volume.
   b) L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à O$x$, d'aire S, parfaitement réfléchissante. On étudie le rebondissement des photons sur cette surface.
   Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon-paroi ? En déduire la force subie par la paroi en fonction de I, S et $c$ ? Exprimer la pression $p$ subie par la paroi en fonction de I et $c$ puis en fonction de $\varepsilon_0$ et $\mathrm{E}_0$.
   c) Reprendre la question ci-dessus lorsque la paroi est parfaitement absorbante.
   d) Calculer I, $\mathrm{E}_0$ et $p$ sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre $d = 5$ mm et une puissance moyenne $\mathrm{P} = 100$ W (laser utilisé dans l'industrie pour la découpe).
3. L'onde est maintenant absorbée par une sphère de rayon $a$, bien inférieur au rayon du faisceau. Quelle est en fonction de I, $a$ et $c$ la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ subie par la sphère ?
4. Cette particule, de masse volumique $\rho$ se trouve à une distance $r$ du Soleil. Calculer le rayon limite $a_0$ pour lequel la force de radiation, due au rayonnement solaire, équilibre l'attraction gravitationnelle due au Soleil. Ce calcule permet-il d'expliquer l'orientation de la queue des comètes ?

Données : $\rho = 3,0.10^3$ kg.m$^{-3}$, $\mathscr{G} = 6,67.10^{-11}$ kg$^{-1}$.m$^3$.s$^{-2}$, masse du Soleil $\mathrm{M} = 2.10^{30}$ kg, puissance moyenne rayonnée par le Soleil : $\mathrm{P} = 4.10^{26}$ W

## VII. Photon de masse non-nulle (X-ESPCI) ♪♪♪

Si l'on suppose que le photon possède une masse non nulle, les équations de Maxwell en l'absence de charges et de courants s'écrivent :

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\mathrm{V}}{d^2} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{A}}}{d^2} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

où V et $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ désignent les potentiels associés aux champs et $d$ une constante. On a alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{V} - \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{A}}}{\partial t} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{A}}$$

1. Déterminer l'unité de $d$.
2. Vérifier que ces équation sont compatibles avec la jauge de Lorentz $\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{A}} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = 0$.
3. Établir l'équation de propagation du potentiel électrique :

$$\Delta \mathrm{V} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{V}}{d^2}$$

4. On cherche en régime stationnaire le potentiel électrique créé par une charge ponctuelle $q$ placée en O. On rappelle l'expression du Laplacien pour une fonction $\mathrm{V}(r)$ en coordonnées sphériques :$\Delta \mathrm{V} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 r\mathrm{V}}{\partial r^2}$.
   Déterminer la forme de $\mathrm{V}(r)$ à une constante multiplicative près et dégager la signification physique concrète de $d$. Par une analyse dimensionnelle, proposer une expression possible de $d$ en admettant de $d$ s'exprime comme un produit de puissance de $h = 6,62.10^{-34}$ J.s, $m$ masse du photon et $c$ célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.
5. Pour décrire la propagation d'ondes électromagnétiques, on cherche un potentiel de la forme :

$$\mathrm{V}_0 \cos(\omega t - kx)$$

   Établir l'expression de $k$ en fonction de $\omega$, $c$, et $d$ et faire apparaître une pulsation critique $\omega_c$
6. On admet que la vitesse à laquelle se propage l'énergie est $v = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$. Exprimer la en fonction de $c$ , $\omega$ et $\omega_c$.
7. À 650 nm, l'écart entre la vitesse mesurée dans le vide et la constante $c$ est inférieur à $0,005\%$. Quelle masse maximale pourrait avoir le photon ?

## VIII. Résolution de problème : Voilier solaire

Un voilier solaire est un vaisseau spatiale équipé d'une grande voile métallisée. Il avance alors grâce au flux de photons solaire.

On suppose qu'un tel vaisseau est en orbite basse autour de la Terre, quelle est la taille minimale de voile qui lui permet de quitter l'orbite terestre ?

Données :

puissance rayonnée par le Soleil : $\mathcal{P} = 4.10^{26}$ W

masse du vaissseau : 1 tonne

Libre à vous d'utiliser d'autres ordres de grandeur si vous le juger utile. Vous pouvez-vous reporter avec profit à l'exercice sur la queue de comète si vous ne voyez pas où aller.

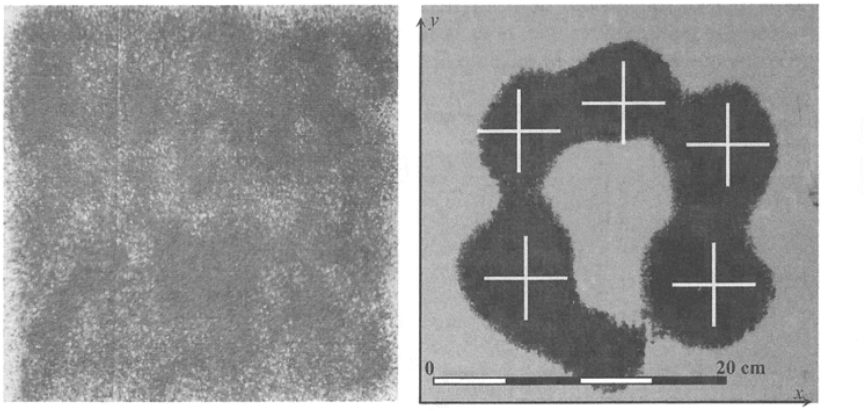
## IX. La vitesse de la lumière dans la cuisine, centrale Physique 2 2015 (Merci à Clotilde Philippe)

On étudie la célérité d'une onde à l'aide d'un four micro-onde où règne un champ électromagnétique de fréquence $f = 2,5$ GHz. La température de fusion du chocolat est de $34 - 35°$C. On prendra pour la taille de la plaque (celle du four) : $h = \ell = 30$ cm.

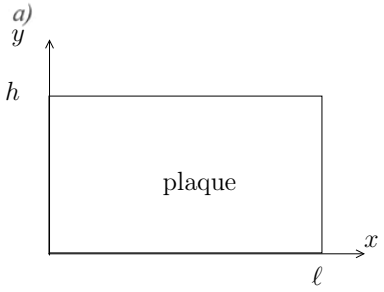
On fait fondre des copeaux de chocolat équitablement répartis sur une plaque. On obtient alors la figure suivante :

1. Établir l'équation de propagation de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.
2. Donner les conditions aux limites. Quel type d'onde est la plus appropriée pour étudier le système.

*a)* Le détecteur de champ électrique est réparti uniformément sur une plaque.
*b)* Après quelques secondes de cuisson, le chocolat a fondu par endroit... On a retiré le chocolat qui n'a pas été affecté par le champ et on a repéré la position des zones fondues.




*a)* *b)*

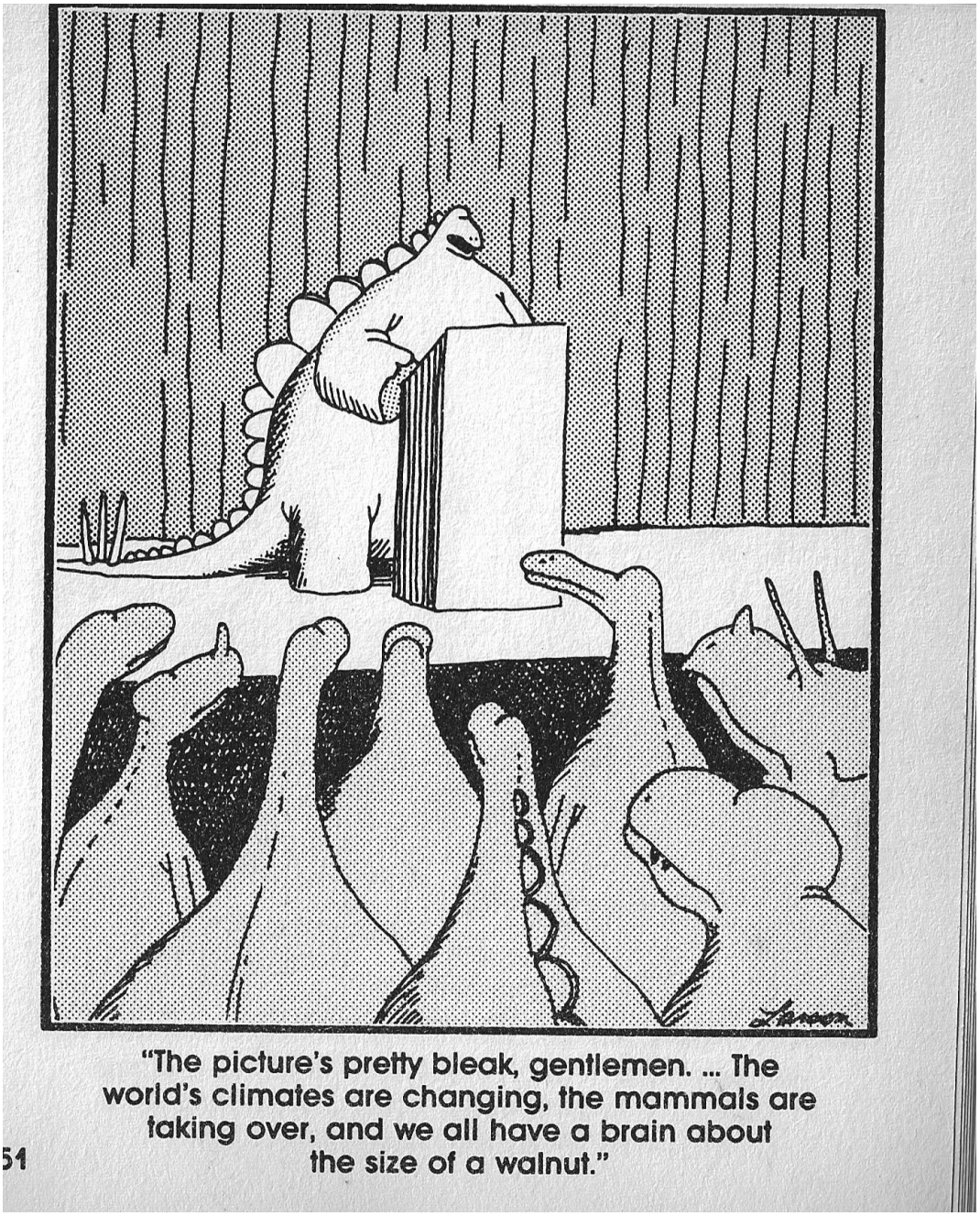



3. On considère une plaque à une altitude $z$ fixée.
   et :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(x,y,t) = \mathrm{E}_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$$

   À l'aide des conditions aux limites établir les relations de quantifications de $k_x$ et $k_y$ avec $n$ et $m$ distincts.
4. Déterminer la distance entre deux ventres selon O$x$ et entre deux ventres selon O$y$.
5. À l'aide de la figure 1 Déterminer $n$ et $m$.
6. Donner l'équation de dispersion.
7. Déterminer la célérité $c$
8. quel est l'intérêt de la grille placé sur la porte du four ?

## X. Un peu d'humour anglo-saxon après tant de rationnalité ...




It came from the far side, Gary Larson