TD n°8 : Ondes électromagnétiques dans un métal ou un plasma, dispersion, absorption

I. Questions de cours

1. Définir un plasma. Citer des exemples.
2. Définir un métal.
3. Donner le modèle de Drüde, justifier le.
4. Définir une pseudo-OPPH, la vitesse de phase, le vecteur d'onde complexe.
5. Définir une onde évanescente.
6. Expliquer qualitativement l'effet de peau.
7. Définir un milieu dispersif, un milieu passif, un milieu actif ?
8. Définir la vitesse de groupe. Interprétation physique dans un milieu faiblement dispersif et non absorbant.
9. Définir un paquet d'onde. Une onde est émise à $t = 0$ sous forme d'impulsion (cf TP coaxe). Tracer son allure au bout d'un certain temps dans un milieu non dispersif absorbant ; dans un milieu absorbant et non dispersif ; dans un milieu à la fois absorbant et dispersif.

II. Revoir le cours : Conductivité complexe dans un métal ♪

On considère un milieu métallique non parfait. On cherche à calculer la conductivité du matériau dans le cadre du modèle de Drüde. L'interaction entre les charges mobiles (électrons) et le réseau cristallin (ions supposés monovalents) entraîne une perte d'énergie électromagnétique ; elle peut être modélisée par une force de frottements visqueux $\overrightarrow{f} = -m\dfrac{\overrightarrow{v}}{\tau}$. On considère qu'il y a n électrons par unité de volume.

Le mouvement des électrons est dû à un champ électromagnétique $(\overrightarrow{\mathrm{E}}, \overrightarrow{\mathrm{B}})$. On considère que $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}$ est une pseudo-OPPH qui se propage selon Oz.

1. Que vaut τ dans un métal comme le cuivre ?
2. Écrire l'équation du mouvement.
3. Montrer que la force due à $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est négligée.
4. Montrer alors que l'on peut définir une conductivité complexe : $\underline{\gamma} = \dfrac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$. Donner l'expression de γ_0, on introduira la pulsation plasma $\omega_\mathrm{P} = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$. À quoi correspond γ_0 ?
5. On donne pour l'or : $\mu = 19,3.10^3$ kg.m^{-3}, $\mathcal{M} = 197$ g.mol^{-1} et $\gamma_0 = 4,5.10^7$ S.m^{-1}. Déterminer τ et la densité d'électron dans le métal.
6. Un faisceau laser de longueur d'onde 1050 nm est envoyé sur le métal. Montrer alors que γ s'écrit dans ce cas :

$$\underline{\gamma} = -j\frac{ne^2}{m\omega}$$

III. Revoir le cours : effet de peau ♪

On utilisera si besoin certains résultats et les données de l'exercice II.
On suppose que le milieu n'est pas magnétique. Le métal occupe un espace semi infini $z > 0$.

1. Dans quel domaine de fréquence la conductivité de l'or est-elle réelle ? On se place dans la suite dans ce domaine.

2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la charge volumique dans le métal. Au bout de combien de temps peut-on la considérer nulle ? Conclusion ?
3. Déterminer l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique. Chercher une solution de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = \mathrm{E}_0 \overrightarrow{u_x} \exp i(\omega t - \underline{k} z)$$

et déterminer $\underline{k}$, le champ électrique et le champ magnétique.

IV. Revoir le cours : réflexion métallique ♪

On utilisera si besoin les résultats et les données de l'exerice II.

On suppose le milieu non magnétique et la densité volumique de charge nulle dans le métal (or). La longueur d'onde incidente est égale à $\lambda = 1050$ nm. Le métal est considéré semi-infini et occupe la partie de l'espace $z > 0$.

1. Écrire les équations de Maxwell vérifiées par les champs dans le conducteur.
2. En déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique.
3. On cherche à étudier la propagation d'une onde plane progressive harmonique polarisée selon $\overrightarrow{u_x}$. Montrer que k vérifie :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

On donnera l'expression de ω_p.

4. Montrer que $\omega^2 \ll \omega_p^2$
5. En déduire k et l'expression des champ électrique et magnétique. Quelle est la nature de l'onde ? Calculer le vecteur de Poynting.
6. Calculer la distance au bout de laquelle les champs sont négligeables. Justifier l'hypothèse milieu semi-infini.

V. Revoir le cours : réflexion métallique : cœfficients de réflexion ♪

On se place dans le cadre de l'exercice IV. Le métal occupe l'espace $z > 0$, on suppose les champs continus. Les champs dans le métal sont les suivants :

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = \underline{\mathrm{E}(0)} \exp(j\omega t) \exp\left(-\frac{\omega_p}{c} z\right) \overrightarrow{u_x}$$

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}} = -\frac{j\omega_p}{\omega c} \underline{\mathrm{E}(0)} \exp\left(-\frac{\omega_p}{c} z\right) \exp(j\omega t) \overrightarrow{u_y}$$

Les champs électriques des ondes incidente et réfléchie dans le vide sont :

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}_i = \mathrm{E}_0 \exp(j\omega(t - z/c)) \overrightarrow{u_x}$$

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}_r = r\mathrm{E}_0 \exp(j\omega(t + z/c)) \overrightarrow{u_x}$$

1. Donner les champs magnétiques correspondants.
2. Quelles relations les champs électriques et magnétiques doivent-ils vérifier ?
3. En déduire l'expression du cœfficient de réflexion. Que peut-on dire de l'amplitude de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente ?
4. Donner l'expression de l'amplitude $\mathrm{E}(0) =| \underline{\mathrm{E}(0)} |$ du champ électrique à la surface du conducteur en fonction de E_0, ω et ω_p.
5. On note v_0 l'ordre de grandeur de la vitesse maximale atteinte par les électrons dans le conducteur. En tenant compte des ordres de grandeur de ω et ω_p, montrer que :

$$v_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{nm}} \mathrm{E}_0$$

VI. Onde guidée entre deux plans parallèles ♪♪

Lorsqu'une onde est transmis par l'intermédiaire d'une cavité, on dit qu'elle est guidée. Sa structure est alors très différente des ondes qui se propage dans le vide. Elle n'est pas forcément plane, ni transverse électrique et transverse magnétique.

Deux plans parallèles situés en $x = 0$ et $x = -a$ délimitent une cavité vide à l'intérieur d'un conducteur parfait . On s'intéresse ici à une onde qui est transverse magnétique.

À l'intérieur d'un conducteur parfait, le champ électromagnétique est nul.

À l'interface d'un conducteur :

— La composante tangentielle du champ électrique est continue.

— La composante normale du champ magnétique est continue.

1. On considère la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques ($i = 1$ ou $i = 2$:

$$\underline{\overrightarrow{B}_i} = \underline{B}_{i0} \exp i(\omega t - \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{u_y} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{k}_i = k(\cos\alpha\overrightarrow{u_z} \pm \sin\alpha\overrightarrow{u_x})$$

. On associera le signe + à $i = 1$.

Que valent $||\overrightarrow{k_1}||$ et $||\overrightarrow{k_2}||$? Écrire le champ magnétique résultant.

2. En utilisant les conditions aux limites, réduire cette forme du champ. Montrer notamment que $\frac{\omega}{c}\sin\alpha = \frac{n\pi}{a}$, où n est entier positif. Que vaut le vecteur d'onde, $\overrightarrow{k_g}$ de l'onde guidée ? Commenter la structure des champs.
3. Donner la relation entre k_g et ω (relation de dispersion).
4. Montrer qu'il existe une valeur de n pour lequel l'onde est transverse électrique et transverse magnétique. Donner la relation de dispersion de ce mode. Quelle est alors la structure de l'onde ?

VII. Dispersion d'une impulsion laser ultra courte ♪♪

On considère une impulsion de lumière ultra-courte (provenant d'un laser), de durée 30 fs $= 30 \times 10^{-15}$ s et de longueur d'onde centrale $\lambda = 800$ nm.

On peut considérer cette impulsion comme un paquet d'onde contenant un grand nombre de fréquences et on pourra utiliser la relation d'incertitude temps-fréquence $\Delta t \Delta\nu \geqslant 1$.

1. Quelle est la largeur minimale du spectre (en nm) de cette impulsion ? En déduire les longueurs d'onde minimales et maximales présentes dans le spectre.
2. On considère que cette impulsion se propage dans un morceau de verre peu dispersif (du quartz) d'épaisseur $e = 3$ cm et dont l'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde suivant la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \text{ avec } A = 1,45 \text{ et } B = 0,0184\ \mu m^2.$$

Calculer la durée de l'impulsion (paquet d'onde) après la traversée du morceau de verre.

3. Pour l'indice optique de l'air, on a $A = 1,000293$ et $B = 3,2 \times 10^{-6}\ \mu m^2$. Quelle distance de propagation dans l'air aurait conduit a un tel élargissement temporel ?
4. Que se passe-t-il pour l'impulsion a la sortie du verre quand elle se propage a nouveau dans le vide ?
5. Quand est-ce que ce phénomène de dispersion apparait ? Citer un autre exemple.

VIII. Ondes longitudinales dans un plasma. ♪

On étudie une onde électromagnétique se propageant dans un plasma peu dense.

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM}) \text{ et } \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_0 \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})$$

On suppose la densité volumique de charge non nulle.

1. Établir l'équation du mouvement d'un électron de masse m, associé à la densité n et de charge $-e$ en faisant les approximations nécessaires. Montrer que l'on peut définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ pour le plasma.

2. À l'aide des équations de Maxwell et de l'équation locale de conservation de la charge, établir une nouvelle expression de γ en fonction de ω et ε_0.
3. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{0}$. en déduire la direction de $\overrightarrow{k}$. Quel nom donne-t-on à ce type de propagation ?

IX. OPPH rectiligne dans un métal réel ♪

On cherche à faire se propager une OPPH rectiligne telle que :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \underline{\mathrm{E}_0} \exp j(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y}$$

où $\underline{\mathrm{E}_0}$ est une constante complexe, dans un métal de conductivité γ, l'onde se propageant dans le sens des x croissants.

1. Établir l'équation de propagation pour $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et montrer que l'on peut négliger l'un des termes pour de fréquences pas trop élevées.
2. Déterminer $\overrightarrow{\mathrm{E}}$
3. En déduire l'expression du champ magnétique.

X. Réflexion sur un métal réel ♪

Une OPPH rectiligne telle que :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y}$$

arrive sur la surface plane $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ d'un métal de conductivité γ. L'onde est partiellement transmise et partiellement réfléchie. Calculer le courant i qui circule dans une épaisseur a du métal, multiple de l'épaisseur de peau. Que devient i lorsque γ tend vers ∞. ?

On rappelle que la composante tangentiel de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est continue et que la composante normale de $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est continue.

XI. Couche anti-reflet (diélectrique) (oral CCP) ♪♪

À la surface d'un verre (indice n) on dépose une couche d'épaisseur e et d'indice n_1 de telle sorte que l'espace est divisé en trois domaines : l'air ($x < 0$) d'indice 1, la couche ($0 < x < e$) d'indice n_1 et le verre ($x > e$) d'indice n. Une OPPH monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement sur $\overrightarrow{u_z}$ arrive dans l'air sous incidence normale et on cherche des conditions pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie dans l'air. On cherche alors en notation complexe des ondes dans les trois milieux de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}(x < 0) = \alpha_a \exp(j\omega t - jk_0 x)\overrightarrow{u_z} \qquad \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}(x > e) = \alpha_v \exp(j\omega t - jnk_0 x)\overrightarrow{u_z} \text{ et}$$

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}(0 < x < e) = \alpha_c \exp(j\omega t - jn_1 k_0 x)\overrightarrow{u_z} + \beta_c \exp(j\omega t + jn_1 k_0 x)\overrightarrow{u_z}$$

1. Quelle est la forme correspondante du champ magnétique dans les trois milieux ?
2. Établir quatre relation entre α_a, α_v, α_c et β_c
3. Une élimination non demandée conduit à la relation :

$$\frac{(n_1+1)(n_1-n)}{n_1-1)(n_1+n)} = \exp(2jn_1 k_0 e)$$

   En déduire les valeurs qu'il faut choisir pour e et n_1
4. Comment expliquer qu'il subsiste un reflet violet sur un objectif ainsi traité lorsque l'on l'observe à la lumière du Soleil ?

XII. Réflexion et transmission entre deux cordes ♪♪

On considère une corde de tension au repos T, tendue selon $x'Ox$. En $x < 0$, sa masse vaut μ_1. Elle vaut μ_2 en $x > 0$. une onde plane progressive harmonique $y_i(x,t)$ se propage dans la demi-corde $x < 0$. En $x = 0$ apparaît une onde harmonique transmise $y_t(x,t)$ et une onde plane harmonique réfléchie $y_r(x,t)$. On néglige les effets de la pesanteur et des frottements.

1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par y dans le cas de petits mouvements.
2. Justifier que les 3 ondes ont même pulsation. Donner l'expression du vecteur d'onde de l'onde incidente, de l'onde réfléchie et de l'onde transmise. Écrire les expressions de y_i, y_r et y_t. en notation complexe.
3. Définir et établir l'expression des cœfficients de réflexion r et de transmission t pour la déformation y.
4. Que remarque-t-on si les masses linéiques sont égales ? Si μ_2 tend vers l'infini ? Si elle tend vers 0 ?

XIII. Propagation d'une onde dans le plasma interstellaire (dispersion) ♪♪

Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m, de charge $-e$, de densité particulaire n, et d'ions de charge électrique q et de densité particulaire N. le mouvement des ions est négligé et celui des électrons, non relativistes, est décrit par le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$. Comme tout plasma ce milieu est globalement neutre. Avec ces hypothèses, on cherche des solutions des équations de Maxwell (à l'exclusion de champs statiques) sous la forme : $\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M},t) = \overrightarrow{\mathrm{E}}_0 \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{\mathrm{OM}}))$. Avec $\overrightarrow{k}$ a priori complexe.

1. Montrer que le champ magnétique de l'onde est aussi décrit par une onde plane de même pulsation et de même vecteur d'onde.
2. Que peut-on dire à priori de la structure de l'onde ? Que peut-on ajouter si on suppose que k est réel ?
3. Déterminer l'amplitude du vecteur densité de courant en fonction de l'amplitude du champ électrique à partir des équations de Maxwell.
4. En étudiant le mouvement des électrons, exprimer la constante α telle que $\overrightarrow{j} = -i\dfrac{\alpha}{\omega}\overrightarrow{\mathrm{E}}$
5. En déduire la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.
6. En posant $\alpha = \varepsilon_0 c^2 \mathrm{K}^2$, calculer les vitesses de phase et de groupe de l'onde en fonction de k et K. Quelle la relation liant ces deux vitesses ?
7. Deux trains d'ondes de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L. En supposant $\mathrm{K}^2\lambda_1^2 \ll 1$ et $\mathrm{K}^2\lambda_2^2 \ll 1$, montrer que ces signaux sont reçus avec un décalage $\delta t = t_2 - t_1$ à déterminer en fonction de L, K, c et des deux longueurs d'ondes.

❦