

TD N°15 : BILAN EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

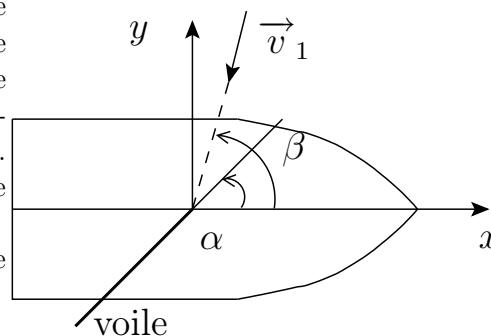
I. Principe du voilier ♪

On considère un bateau se déplaçant à vitesse constante. On se place dans le référentiel lié au bateau auquel on associe une base Oxy . La surface totale de la voile sera notée S . Le plan de la voile est incliné d'un angle α par rapport à la direction du bateau. Le vent arrive sur la voile avec une vitesse $\vec{v}_1$, selon la direction définie par l'angle β (toujours par rapport à la direction du bateau). On suppose que le vent se réfléchit sur la voile selon les lois de Descartes en ne perdant pas de vitesse.

La pression est supposée uniforme, l'air est de masse volumique

ρ .

Calculer la force, projetée selon Ox , qui s'applique à la voile.



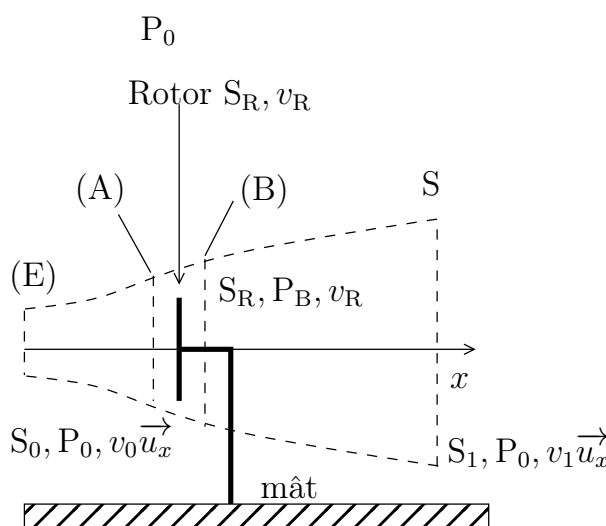
II. Éolienne ♪

On cherche à déterminer la puissance prélevée au vent par le rotor d'une éolienne. En amont, loin de l'éolienne, le vent est uniforme et permanent de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ et la pression est uniforme et vaut P_0 .

On néglige les effets de la pesanteur. L'éolienne est formée d'un mât, dont on négligera l'influence, portant un rotor d'axe horizontal que l'on assimilera à un disque de diamètre D et de surface S_0 .

L'écoulement de l'air est unidimensionnel, stationnaire, incompressible et parfait, sauf au voisinage immédiat du rotor. La masse volumique de l'air est notée μ .

La figure suivante représente l'allure du tube de courant s'appuyant sur le pourtour du rotor, les valeurs de la pression et de la vitesse sont précisées sur le schéma.



Les surfaces (A) et (B) sont situées de part et d'autre du rotor à proximité immédiate et on prend donc : $S_A = S_B = S_R$ et $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_R = v_R \vec{u}_x$. On désigne par $\vec{F} = F \vec{u}_x$, la force totale exercée par l'hélice sur le fluide.

1. Quelle est la relation entre v_1 et v_0 ?
2. En faisant un bilan de quantité de mouvement sur un système que l'on précisera, établir une relation liant v_0 , v_1 , S_0 , μ et F .
3. En faisant un bilan de quantité de mouvement, établir une relation liant P_A , P_B , S_R et F . En déduire l'expression de la vitesse de l'air au niveau du rotor v_R en fonction de v_0 et v_1 .

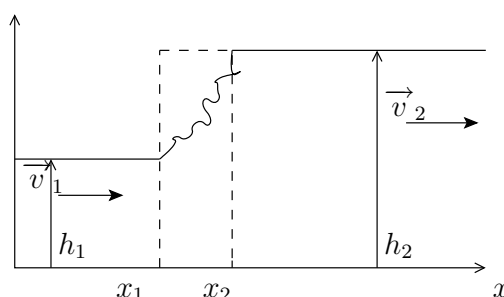
- Déterminer, à partir d'un bilan énergétique, l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ des actions mécaniques que le vent exerce sur le rotor en fonction de μ , S_R , v_0 et du rapport $\alpha = \frac{v_1}{v_0}$. Pour quelle valeur cette puissance est-elle maximale ? Donner l'expression de $\mathcal{P}_{max}$ en fonction de μ , S_R et v_0 .
- On étudie deux éoliennes différentes :
 - Éolienne de faible puissance utilisée sur un voilier : diamètre $D = 1140$ mm, $v_0 = 44,4$ km.h⁻¹ et $\mathcal{P}_{nominale} = 400$ W
 - Une éolienne de forte puissance : diamètre $D = 47$ m, $v_0 = 15$ km.h⁻¹ et $\mathcal{P}_{nominale} = 660$ kW.
 Commenter en liaison avec les résultats précédents sachant que la puissance nominale est la puissance pour laquelle l'éolienne a été conçue préférentiellement ; v_0 représente également la vitesse nominale. On prendra $\mu = 1,225$ kg.m⁻³.

III. Ressaut hydraulique ♣

Avant de commencer cet exercice, aller dans la cuisine et ouvrir le robinet (le phénomène est plus simple à voir si le fond est plat). On observe alors autour du jet une zone de faible épaisseur, puis plus loin un bourrelet correspondant à une remontée du niveau de l'eau. Ce bourrelet est appelé ressaut.

- Observer la zone proche du ressaut. Comment caractériser l'écoulement à cet endroit ?

On modélise un ressaut dans un écoulement unidimensionnel et permanent dans un canal rectiligne parallèle à l'axe z Ox et de largeur L selon Oy . En amont (respectivement en aval) du ressaut, la vitesse du fluide vaut uniformément $v_1 \vec{u}_x$ (respectivement $v_2 \vec{u}_x$) et la profondeur est h_1 (resp. h_2). Le liquide est considéré comme incompressible de masse volumique ρ . La pression de l'atmosphère est P_0 . Pour étudier ce phénomène, on considère le fluide contenu dans le parallélépipède rectangle de section $S = Lh_2$ limité par les sections d'abscisses x_1 et x_2 situées de part et d'autre du ressaut.



- Peut-on déduire v_2 et h_2 du théorème de Bernoulli ? Why ?
- Exprimer la pression au sein du liquide en fonction de z sur la face d'entrée (section $x = x_1$), et sur la face de sortie ($x = x_2$).
- Établir un bilan de quantité de mouvement pour le fluide contenu dans le volume considéré. En déduire une relation entre v , h_1 , v_2 , h_2 .
- Calculer v_1 et v_2 en fonction de h_1 , h_2 et g .
- Exprimer, en fonction de ρ , g , D_v (débit volumique), h_1 et h_2 , la puissance dissipée dans le ressaut.

IV. Cavitation ♣

Sous l'effet d'une baisse de pression brutale, des bulles de gaz peuvent se former dans l'eau : ce phénomène est appelé cavitation. Il est particulièrement important au voisinage des hélices des navires et provoque une forte érosion.

À l'instant $t = 0$, une bulle de gaz, de centre O et de rayon initial a_0 se forme dans un volume d'eau supposé infini. Pour simplifier, on néglige l'influence de la pesanteur, on suppose que la pression au sein de la bulle est nulle et que son centre est fixe dans le référentiel d'étude. Le champ de vitesse est :

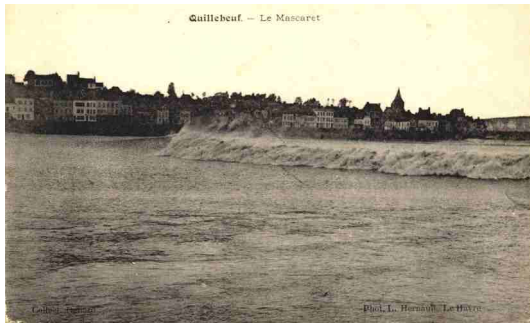
$$\vec{v} = \frac{\dot{a}a^2}{r^2} \vec{u}_r$$

À l'infini, la pression est notée P_∞ . On étudie alors l'implosion de la bulle dont le rayon est $a(t)$ à l'instant t .

1. Montrer que l'énergie cinétique de la bulle vaut : $E_c = 2\pi\rho a^3 \left(\frac{da}{dt}\right)^2$
2. Calculer la puissance P des forces de pression extérieures s'exerçant sur le volume d'eau compris entre la sphère de rayon $a(t)$ et la sphère de rayon R . En déduire que la limite de P lorsque R tend vers l'infini vaut : $P_\infty = -4\pi P_\infty a^2 \frac{da}{dt}$
3. En déduire l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par $a(t)$. Adimensionner l'équation en posant $\alpha = a/a_0$ et $t^* = t/\tau$ où τ est une constante qu'on choisira a posteriori en fonction de p_∞ , ρ et a_0 ; en déduire comment le temps d'implosion T de la bulle varie avec p_∞ , ρ et a_0

V. Mascaret ♪♪

On appelle soliton ou onde solitaire une onde qui se propage sans se disperser dans un milieu dispersif. Cela est possible grâce des phénomènes non linéaires qui compensent exactement la dispersion. On retrouve ces solitons dans de nombreux domaines de la physique.



Le mascaret est une onde solitaire qui remonte l'estuaire de certains fleuves ^a. On adopte un modèle simple à une dimension. Le fleuve de largeur constante L s'écoule vers la mer (et oui!) dans la direction Ox dirigée de l'amont vers l'aval avec une vitesse constante v_1 et une hauteur d'eau h_1 en amont du mascaret. Le mascaret a un profil rectangulaire et remonte l'axe Ox avec une vitesse constante v . la vitesse du fleuve et la hauteur d'eau assez loin en aval du mascaret sont respectivement v_2 et h_2 . L'eau est un fluide parfait, incompressible de masse volumique ρ . On peut mesurer v_1 , h_1 et h_2 . On se propose de calculer v_1 et v_2 .

^a. En France, on ne le trouve plus que sur la Gironde voir <http://mascaretgironde.free.fr/>

1. On se place dans le référentiel galiléen R_m qui se déplace avec le front du mascaret. Effectuer un bilan de masse dans ce référentiel et en déduire une relation entre v et v_2 . Retrouver cette relation en travaillant dans le référentiel fixe.
2. En effectuant un bilan de quantité de mouvement, dans R_m , pour une masse d'eau à cheval sur le front du mascaret, établir une relation entre v , v_1 , v_2 , h_1 et h_2 .
3. a) Exprimer v en fonction de v_1 , h_1 et h_2 . La vitesse du mascaret est-elle la plus rapide au moment des basses eaux ou au moment des crues du fleuve ?
b) Exprimer v_2 en fonction de v_1 , h_1 et h_2 . Interpréter le changement de signe de v_2 quand h_2 augmente. Commenter.

VI. Tuyère de Laval ♪♪♪

On considère un écoulement stationnaire d'air (assimilé à un gaz parfait) à travers une tuyère horizontale, de révolution autour de l'axe Ox , de section $S(x)$ non constante. la tuyère est calorifugée et l'écoulement unidimensionnel : $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$. À l'entrée de la tuyère (en $x = 0$), on note T_0 , P_0 , ρ_0 , v_0 , la température, la pression, la masse volumique et la vitesse du fluide. On pose $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, supposé constant. Le fluide est supposé parfait. Il subit une transformation isentropique au cours de son passage dans la tuyère.

1. Établir l'équation de Saint-Venant :

$$v^2(x) = v_0^2 - \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \left(1 - \left(\frac{p_0}{p(x)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

De deux manières différentes : à partir de l'équation d'Euler puis en faisant un bilan énergétique pour un système fermé bien défini.

2. Établir l'équation d'Hugoniot :

$$\frac{1}{S(x)} \frac{dS}{dx} = (M^2(x) - 1) \frac{1}{v(x)} \frac{dv}{dx} \text{ où } M(x) = \frac{v(x)}{c(x)} \text{ et } c(x) = \sqrt{\gamma \frac{p(x)}{\rho}}$$

M est le nombre de Mach.

3. On souhaite que l'écoulement soit subsonique à l'entrée de la tuyère et supersonique à la sortie. Comment doit varier la section $S(x)$ pour que la vitesse augmente avec x ?

VII. Béliet Bollée ♪♪♪

Le béliet Bollée¹ dont Lavoisier a décrit la principe à la fin du XVIII^e siècle et qui a été mis en œuvre industriellement par l'ingénieur Bollée dans la région du Mans au XIX^e siècle.

L'idée est d'utiliser l'eau issue d'un bassin alimenté naturellement par ruissellement en la rejetant à une altitude $h_1 = 5$ m plus bas dans un ruisseau via une canalisation(1) pour alimenter une pompe. La pompe est le béliet Bollée proprement dit, qui doit son nom au fait qu'il utilise comme principe moteur un coup de béliet dans la canalisation (1) engendré par un blocage momentané de l'écoulement. La pompe fait remonter de l'eau du ruisseau jusqu'au lieu d'utilisation à une hauteur $h_2 = 50$ m plus haut à travers une canalisation(2). Le système fonctionne en régime stationnaire avec des débits volumiques respectifs D_1 et D_2 dans les deux canalisations.

En négligeant les variations de l'énergie cinétique de l'eau devant les variations d'énergie potentielle et en faisant un bilan d'énergie cinétique sur le bon système (fermé), montrer que le rendement du dispositif, défini par le rapport des débits ne peut pas dépasser une valeur maximale qu'on exprimera en fonction de h_1 et h_2 .



1. Voir une illustration sur <http://www.onpeutlefaire.com/fichetechniques/ft-pompe-belier.php>, mais avec un regard critique sur le texte « pompage perpétuel sans énergie » !