

TD N°13 : CINÉMATIQUE DES FLUIDES ET RÉVISION DE STATIQUE DES FLUIDES

I. questions de cours

1. Donner l'expression des forces volumiques classiques s'exerçant sur un fluide.
2. Donner l'équivalent volumique des forces de pression.
3. Donner l'expression de l'équation d'Euler.
4. Retrouver l'expression des différents théorèmes de Bernoulli (hypothèses ?).
5. Donner l'expression de la force visqueuse exercée sur un élément de surface $d\vec{S}$ dans un écoulement parallèle.
6. Donner l'équivalent volumique des forces de viscosité.
7. Donner l'expression de l'équation de Navier-Stokes.
8. Quelles sont les conditions aux limites applicables à un fluide parfait ? Un fluide visqueux ?
9. Comment peut-on interpréter la viscosité d'un fluide ?
10. Quelle est l'expression du nombre de Reynolds ? À quoi correspond-t-il ?
11. Décrire qualitativement l'écoulement autour d'une sphère lorsque le nombre de Reynolds augmente.
12. Décrire la couche limite, donner un ordre de grandeur de son épaisseur. Définir un écoulement parfait.

II. Glaçon dans un verre d'eau (statique des fluides) ♪

Dans un verre d'eau rempli à ras bord, un glaçon flotte. Que se passe-t-il si le glaçon fond ? Justifier. Application au réchauffement climatique ?

III. Résultante des forces de pression (statique des fluides) ♪♪

Une demi boule en métal de rayon R est posée sur le fond horizontal d'un récipient. On verse de l'eau jusqu'à la hauteur $h > R$.

La masse volumique de l'eau est ρ et la pression atmosphérique P_0 .

Trouver deux méthodes différentes qui permettent d'obtenir la résultante des forces de pression avec très peu de calcul ... et beaucoup de physique.

IV. Centrifugation d'un gaz (statique des fluides) ♪♪

1. Un cylindre (vertical) de rayon a à la température T_0 contient un gaz parfait de masse molaire M à la pression P_0 . L'atmosphère est à la même température. Le cylindre est mis en rotation à la vitesse angulaire ω . Déterminer le champ de pression $P(r)$ observé à l'équilibre dans le référentiel tournant, r étant la distance à l'axe de rotation.
2. Montrer que le résultat peut s'interpréter au moyen du facteur de Boltzmann.
Donnée : $\vec{\nabla}P = \left(\frac{\partial P}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \frac{\partial P}{\partial z} \right)$ en cylindrique.
Remarque : on ne s'intéressera qu'à la variation de P suivant r (Pourquoi ?).
3. On fait maintenant tourner un cylindre contenant du mercure. On prend en compte le champ de pesanteur, pourquoi ? Quelle est l'équation des isobares ? Application ?

V. Fonction potentiel ♪

Un écoulement a pour fonction potentiel :

$$\psi = ax^2 + by^2$$

1. Déterminer la vitesse.
2. Déterminer les lignes de courant. Étudier les cas particuliers : $a = 0$, $a = -b$ et $a = b$. Pour chaque cas, tracer le profil des vitesses et les lignes de courants. Interpréter.

VI. Étude d'écoulements ♪

1. On considère un écoulement stationnaire bidimensionnel dont le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v}(M, t) = -kx\vec{u}_x + ky\vec{u}_y$$

où k est une constante.

- a) Déterminer les trajectoires des particules de fluide et les lignes de courant.
 - b) Calculer l'accélération d'une particule de fluide de deux façons différentes.
 - c) Dessiner l'évolution de la particule de fluide élémentaire entre les instants t et $t + dt$. Montrer que, au premier ordre en dt , sa surface ne change pas. Était-ce prévisible ?
2. On considère un écoulement bidimensionnel dont le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v}(M, t) = (-kx + bt)\vec{u}_x + a \sin \omega t \vec{u}_y$$

avec a, b, k qui sont des constantes.

- a) Caractériser cet écoulement (stationnaire ? compressible ? tourbillonnaire ?)
- b) Déterminer les trajectoires des particules de fluide et les lignes de courant.
- c) Calculer l'accélération d'une particule de fluide de deux façons différentes.

VII. Expansion d'un fluide ♪♪

On considère un fluide occupant une sphère de rayon r_0 , de manière homogène, pour $t < 0$. À l'instant $t = 0$, on communique aux particules de fluide une vitesse initiale radiale v_{ini} proportionnelle à la distance initiale r_{ini} entre l'origine O et la particule de fluide :

$$v_{ini} = \frac{r_{ini}}{\tau}$$

où τ est une constante. On suppose que pour $t > 0$, les particules conservent leur vitesse initiale.

1. Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}(r, t)$ selon le point de vue d'Euler.
2. Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}$ par deux méthodes différentes.
3. On suppose la répartition de masse homogène. Déterminer $\rho(t)$ en fonction de $\rho(0)$ de deux manières différentes.

VIII. La houle ♪♪(♪)

Il s'agit de modéliser une onde de gravité à la surface de l'eau, plus connue sous le nom de houle. Le modèle considère que l'onde est monochromatique plane progressive dans la direction de l'axe Ox. Le fluide est considéré parfait. L'axe z est dirigé vers le bas.

1. Montrer que l'accélération convective est négligeable devant l'accélération locale si la vitesse v est petite devant la vitesse de phase de l'onde ou encore si l'amplitude de l'onde est petite devant sa longueur d'onde. On se place dans le cadre de cette approximation dans toute la suite.
2. En utilisant la notation complexe et l'équation d'Euler, montrer que l'écoulement est irrotationnel.

3. On considère que la houle provoque un écoulement irrotationnel incompressible (et non-visqueux) dont le potentiel des vitesses est :

$$\Phi = f(z)\cos(\omega t - kx)$$

Quelle équation différentielle est vérifiée par $f(z)$?

4. Justifier qu'en $+\infty$, $f(z) = 0$. En déduire $f(z)$.
5. Déterminer la trajectoire d'une particule de position moyenne (x_1, y_1, z_1) .
6. Soit $\zeta(x, t)$ l'équation de la surface de l'eau, l'origine de Oz étant la surface au repos. Justifier l'approximation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

7. Démontrer que :

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu g z + P = 0$$

8. Déduire des deux conclusions précédentes une équation aux dérivées partielles vérifiée par Φ et en déduire la relation de dispersion. Commenter le résultat.
9. Que se passe-t-il dans un bassin de profondeur finie H ?

