L'ESSENTIEL DES MATHÉMATIQUES DE SUP . . . POUR LA PHYSIQUE

Table des matières

I Les nombres complexes **2**
I.1 Notation . . . 2
I.2 Quel est le signal physique ? . . . 2
I.3 Intérêt principal de la notation complexe . . . 2
I.4 Dérivation et intégration . . . 2
I.5 Quelles sont les autres opérations autorisées ? . . . 3

II Utilisation pratique de la différentielle d'une fonction, développement autour de zéro **3**
II.1 Notation différentielle . . . 3
II.2 Différentielle d'une fonction d'une seule variable . . . 3
II.3 Exemple d'application . . . 4
II.4 Différentielle d'une fonction de deux variables . . . 4
II.5 Développements limités (DL) classiques à connaître pour la physique . . . 4
II.6 Opérations possibles . . . 5

III Composée de fonctions, résolution d'équation différentielle non linéaire **5**
III.1 Dérivée d'une fonction composée . . . 5
III.2 Dérivée de la fonction réciproque . . . 6
III.3 Méthode de séparation des variables . . . 6

IV Résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à cœfficients constants **7**
IV.1 Mise sous forme canonique de l'équation . . . 7
IV.2 Résolution de l'équation différentielle . . . 7
a) Détermination de la solution homogène . . . 7
b) Détermination de la solution particulière . . . 8
IV.3 Exemple . . . 8

V Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à cœfficients constants **8**
V.1 Équation du type $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \mathrm{E}$ . . . 8
V.2 Solution . . . 9
a) Détermination de la solution homogène . . . 9
b) Détermination de la solution particulière . . . 9
V.3 Équation du type $\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \mathrm{E}$ . . . 9
a) Quelques remarques physiques . . . 9
b) Solution de l'équation homogène . . . 9
c) Équation caractéristique . . . 10
d) $\Delta > 0$ (régime dit apériodique) . . . 10
e) $\Delta = 0$ (régime dit critique) . . . 10
f) $\Delta < 0$ (régime dit pseudo-périodique) . . . 10

I. Les nombres complexes

Ce qui est dit est valable dans tous les domaines de la physique où un système répond à une excitation sinusoïdale : électrocinétique, mécanique, électromagnétisme ...

La pulsation d'excitation ω est fixée par l'excitateur (par exemple le GBF dont vous réglez la fréquence). De plus, un signal sinusoïdal monochromatique (une seule pulsation) peut s'écrire :

$$u(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t) \text{ ou } u(t) = \mathrm{U}_m\cos(\omega t + \varphi)$$

Donc dans les deux cas, le signal est complètement déterminé si on connaît le couple de données (A, B) ou (A, φ). Ces deux derniers paramètres s'obtiennent très facilement si l'on utilise une représentation complexe du signal réel, il suffit de prendre le module et l'argument du nombre complexe associé au signal.

I.1 Notation

Les notations sont différentes de celles des mathématiques. Les complexes sont notés :

$$\underline{u}, \text{ son conjugué se notera alors } \underline{u}^*$$

L'imaginaire pur de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ se note j [1]

Pour fixer les idées, considérons une tension sinusoïdale :

$$u(t) = \mathrm{U}_m\cos(\omega t + \varphi)$$

À cette tension on peut associer un nombre complexe

$$\underline{u} = \mathrm{U}_m e^{j(\omega t+\varphi)} \text{ soit } \underline{u} = \mathrm{U}_m e^{j\varphi}e^{j\omega t} \text{ ie } \underline{u} = \underline{\mathrm{U}_m}e^{j\omega t}$$

$\underline{\mathrm{U}_m} = \mathrm{U}_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe du signal, c'est elle qui contient toute l'information sur celui-ci(l'amplitude U_m et la phase φ). Donc il suffit de déterminer l'amplitude complexe pour connaître sans ambiguïté le signal.

I.2 Quel est le signal physique ?

La valeur complexe associée n'a pas de sens physique, seule la valeur réelle en a une. D'après ce qui précède :

$$u(t) = \mathrm{Re}\,(\underline{u})$$

Il ne faudra donc pas oublier de prendre la partie réelle du signal après avoir effectué l'ensemble des calculs en complexe. Ceci se fait généralement en prenant le module (ce qui donne l'amplitude) et l'argument (ce qui donne la phase).

I.3 Intérêt principal de la notation complexe

Grâce à l'utilisation des complexes, la dérivation et l'intégration sont remplacées par une multiplication ou une division par $j\omega$.

I.4 Dérivation et intégration

Soit le signal complexe : $\underline{u} = \underline{\mathrm{U}_m}e^{j\omega t}$. Sa dérivée vaut alors :

$$\frac{d\underline{u}}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{u} = \omega\underline{\mathrm{U}_m}e^{j(\omega t+\frac{\pi}{2})}$$

Ceci n'a de sens que si l'on retrouve bien la dérivée du signal réel lorsque l'on prend la partie réelle du signal complexe dérivée, dérivons le signal réel :

$$\frac{du(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega\mathrm{U}_m\sin(\omega t+\varphi) = \omega\mathrm{U}_m\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

Prenons la partie réelle de la dérivée du signal complexe :

$$\mathrm{Re}\,(\omega\underline{\mathrm{U}_m}e^{j(\omega t+\frac{\pi}{2})}) = \omega\mathrm{U}_m\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

1. Surtout en électronique, pour éviter la confusion avec l'intensité. Dans d'autres domaines, on trouvera i ou j.

On retrouve bien la même chose.

De même si on intègre :

$$\int \underline{u} dt = \frac{1}{j\omega}\underline{u}$$

Je vous laisse vérifier que l'on retrouve bien l'intégrale du signal réel si l'on prend la partie réelle du résultat obtenu. Vous remarquerez que je n'ai pas pris de constante lors de l'intégration. Tout simplement parce que ajouter une constante, c'est ajouter un signal physique constant ; par exemple une tension constante. Nous n'en tenons pas compte car on s'intéresse uniquement à la partie variable du signal, la partie constante peut se traiter avec les lois de l'électrocinétique vues en début d'année de sup.

Donc intégrer revient à diviser par $j\omega$, dériver multiplier par $j\omega$.

I.5 Quelles sont les autres opérations autorisées ?

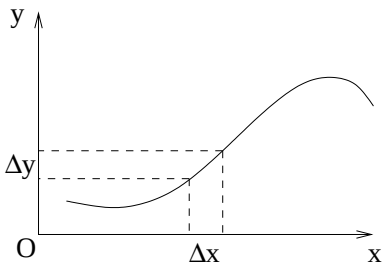
Les additions et les soustractions, par contre la multiplication et la division sont interdites, tout simplement parce que

$$\text{Re}\,(\underline{u_1 u_2}) \neq u_1 u_2$$

II. Utilisation pratique de la différentielle d'une fonction, développement autour de zéro

II.1 Notation différentielle

Considérons la représentation graphique, $y = f(x)$ d'une fonction f.



Au point x, la tangente ayant pour pente $f'(x)$, la variation de y, δy *autour de* x s'écrit :

$$\delta y = f'(x)\delta x + \varepsilon(\delta x)$$

$\varepsilon(\delta x)$ tendant vers zéro lorsque δx tend vers zéro. À la limite, on écrira :

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

dy, variation infinitésimale de y lorsque x subit une variation infinitésimale dx. La valeur de la dérivée de f au point x s'écrit alors :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

Ce qui nous importe en physique (et en chimie), c'est l'interprétation de la dérivée première comme le rapport de quantités infinitésimales.

Ainsi on assimilera la variation réelle δy à la différentielle dy :

$$\delta y \approx \mathrm{d}y$$

II.2 Différentielle d'une fonction d'une seule variable

D'après ce qui précède la différentielle d'une fonction d'une seule variable f s'écrit simplement :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Par exemple :

$$\mathrm{d}\sin(i) = \cos(i).\mathrm{d}i$$

La différentielle d'une fonction est donc égale à la dérivée de cette fonction multipliée par une petite variation de la variable.

II.3 Exemple d'application

Le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire varie de 10 km. De combien varie la période ? Vous avez appris que :

$$\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{R}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM_T}}$$

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{GM_T}}}\mathrm{R}^{3/2} \text{ donc } \mathrm{dT} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{GM_T}}}\frac{3}{2}\mathrm{R}^{1/2}\mathrm{dR}$$

En réutilisant la première formule :

$$\mathrm{dT} = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}\mathrm{dR}$$

Avec $\mathrm{T} = 86164$ s et $\mathrm{R} = 36.10^6$ m : $\delta\mathrm{T} = 3,5.10^{-2}$ s

II.4 Différentielle d'une fonction de deux variables

Pour une fonction de deux variables $f(x, y)$, il suffit de généraliser :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Très schématiquement, le premier terme peut être vu comme la variation de f due à la variation de x, le second, la variation de f due à y. La variation globale étant la somme des deux.

II.5 Développements limités (DL) classiques à connaître pour la physique

Pour x proche de zéro :

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\sin(x) \approx x$$

$$\tan(x) \approx x$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$$

$$\text{En particulier : } \frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 \ (\alpha = -1)$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \ (\alpha = 1/2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \ (\alpha = -1/2)$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

$$\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

II.6 Opérations possibles

Je vous renvoie au cours de mathématiques pour plus de détails et de rigueur.

Si une fonction f est un produit de fonctions $g, h, i, j \ldots$, dont on peut calculer les DL alors le DL de f est généralement égal au produit des approximations de chacune des fonctions $g, h, i, j \ldots$.

Exemple :

$$f(x) = \sin(x)\cos(x)$$

Le DL de f à l'ordre 2 sera :

$$f(x) \approx x(1 - \frac{x^2}{2}) \approx x - \frac{x^3}{2}$$

Soit en gardant uniquement les termes de degré inférieurs ou égaux à 2 :

$$f(x) \approx x$$

Cela s'applique aussi à un rapport de fonction (à condition que la limite en zéro du dénominateur soit non nulle, si c'est le cas le calcul est possible uniquement si le numérateur possède aussi une limite nulle) :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \approx \frac{x}{1 - \frac{x^2}{2}}$$

On peut aussi composer les DL de deux fonctions qui admettent des DL :

$$\tan(x) \approx x \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}}$$

$$\text{Posons } \mathrm{X} = \frac{x^2}{2} : \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} \approx \frac{1}{1 - \mathrm{X}} \text{ d'où } \frac{1}{1 - \mathrm{X}} \approx 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$$

On a alors :

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$

Soit :

$$\tan(x) \approx \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2}} \approx x + \frac{x^3}{3}$$

III. Composée de fonctions, résolution d'équation différentielle non linéaire

III.1 Dérivée d'une fonction composée

Soit une fonction composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ Si l'on écrit le nombre dérivé :

$$[(g \circ f)'(x))] = f'(x).g'(f(x))$$

Dans le membre de gauche x est la variable, dans celui de droite x est la variable pour f mais $f(x)$ est la variable pour g. Ainsi en notation différentielle, on écrira :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f}$$

Vous remarquerez que l'on note $g \circ f$, g (puisque l'on sait que la variable est x, il n'y a pas d'ambiguité). Par contre à droite on note aussi g mais en tant que fonction de $f(x)$.

Dériver une fonction composée revient en notation différentielle à multiplier et à diviser par l'élément différentiel $\mathrm{d}f$.

Exemple :
Supposons que nous ayons l'expression de l'altitude z en fonction de la position x qui dépend elle-même du temps $z(x(t))$. on a alors ("z=g", "x=f" et "t=x" par rapport à ce qui précède) :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Or $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$ (vitesse du mobile suivant x), on peut donc écrire :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

Cette technique est aussi très utilisée pour effectuer un changement de variable dans les équations différentielles. Elle permet alors d'intégrer ces équations différentielles plus simplement.

Plus généralement si on suppose que l'on a une fonction $v(a(z(t)))$, on pourra écrire :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}$$

Attention ! cette méthode n'est utilisable que pour les dérivées premières.

III.2 Dérivée de la fonction réciproque

Si l'on connaît la dérivée de f par rapport à x, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, alors la dérivée de la fonction réciproque $x : f(x) \mapsto x(f(x))$ est $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f}$

Exemple : Supposons que l'on connaisse l'expression d'une fonction $t(w)$:

$$t(w) = w + \frac{4}{3}w^3$$

Supposons que nous ayons besoin de dériver la fonction réciproque $w(t)$. Obtenir cette fonction directement (pour la dériver ensuite) demanderait de résoudre une équation du troisième degré en w, ce qui n'est pas simple. Il suffit alors d'utiliser la dérivée de la fonction réciproque sous forme différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}w} = 1 + 4w^2 \text{ d'où } \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+4w^2}$$

III.3 Méthode de séparation des variables

Cette méthode est très utile pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. Exemple :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2$$

Soit en multipliant par $\mathrm{d}t$ et en divisant par $-v^2$:

$$-\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = k\,\mathrm{d}t$$

On a ainsi séparé les variables, chacune étant uniquement dans l'un des membres. On peut alors intégrer de chaque côté :

$$\int_{v_0}^{v_f} -\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^{t_f} k\,\mathrm{d}t$$

Attention à l'ordre des bornes : v_0 étant la vitesse à $t = 0$ et v_f la vitesse à $t = t_f$. Je vous laisse le soin de terminer le calcul.

IV. Résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à cœfficients constants

La résolution d'un problème physique passe très généralement par deux étapes. La première consiste à établir les équations qui régissent le comportement du système étudié, la seconde consiste à résoudre mathématiquement ces équations [2]. Il ne s'agit donc pas ici d'étudier rigoureusement les équations différentielles mais simplement d'apprendre à utiliser un outil.

On rappelle qu'en sciences physiques, on note la dérivée sous deux formes soit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée première puis $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ pour la dérivée seconde [3] ... soit $\dot{u}$ pour la dérivée première, $\ddot{u}$ pour la dérivée seconde [4] ...

IV.1 Mise sous forme canonique de l'équation

Une équation différentielle linéaire du premier ordre à cœfficients constants peut s'écrire sous la forme :

$$a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + bu = b'\mathrm{E}(t)$$

a, b, b' et $\mathrm{E}(t)$ étant des paramètres physiques. Par exemple en électronique : résistance, capacité pour a, b et b' et généralement la tension imposée par le générateur pour $\mathrm{E}(t)$. Par homogénéité, b et b' s'expriment forcément dans la même unité (en particulier b peut être égal à b'). On supposera que u est une tension dont on cherche l'expression.

En divisant le tout par a, on obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{a}u = \frac{b'\mathrm{E}(t)}{a}$$

L'expression précédente montre que $\frac{b}{a}$ est nécessairement l'inverse d'un temps (puisque $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{b}{a}u$ doivent avoir la même unité).

On posera donc : $\frac{b}{a} = \frac{1}{\tau}$, τ (tau) en seconde. L'équation s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{b'\mathrm{E}(t)}{a}}$$

Vous devez systématiquement mettre les équations différentielles du premier ordre sous cette forme, dite canonique avant de chercher leurs solutions [5].

τ (tau), est le temps caractéristique du circuit. Il gouverne le comportement temporel du circuit étudié. Il est donc important de connaître son expression. Vous pourrez alors discuter de l'influence des paramètres physiques (résistance, capacité...) sur l'évolution temporelle du circuit.

IV.2 Résolution de l'équation différentielle

Les solutions sont du type :

$$\boxed{u(t) = u_{\mathrm{H}}(t) + u_{\mathrm{SP}}(t)}$$

1. $u_{\mathrm{H}}(t)$ est la solution générale de l'équation homogène (ie l'équation différentielle où l'on remplace $\mathrm{E}(t)$ par 0).
2. $u_{\mathrm{SP}}(t)$ est une solution particulière de l'équation.

a) Détermination de la solution homogène

On montre qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u_{\mathrm{H}} : t \mapsto \mathrm{K}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

K ***étant une constante à déterminer grâce aux conditions initiales.***

2. En faisant parfois des approximations justifiées par la situation physique étudiée
3. Si on considère que x est la variable.
4. Notation généralement utilisée pour la dérivée par rapport au temps
5. De plus du point de vue de la technique mathématique, l'expression est plus simple à manipuler

b) Détermination de la solution particulière

La solution particulière dépend de la fonction E.

1. Si E est une fonction constante alors on cherchera une solution particulière constante.
2. Si E est de la forme $t \mapsto \mathrm{E}_0 e^{-\lambda t}$, alors on recherchera une solution particulière de la forme $u_{\mathrm{SP}} : t \mapsto \mathrm{B}e^{-\lambda t}$, B étant une constante à déterminer. On calcule B en fonction de E_0 en injectant l'expression de u_{SP} dans l'équation différentielle.
3. Si E est une fonction sinusoïdale alors on utilisera la méthode de la variable complexe.

Les cas les plus courants en Sciences Physiques sont le premier et le troisième.

IV.3 Exemple

On considère le cas où E est une fonction constante.
On suppose aussi qu'initialement $u(0) = 0$ (condition initiale).
Il faut alors résoudre :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{b'\mathrm{E}}{a}$$

Le second membre est constant, donc on recherche une solution particulière U_0, constante. En remplaçant u par U_0 dans l'équation différentielle, on obtient alors :

$$\frac{1}{\tau}\mathrm{U}_0 = \frac{b'\mathrm{E}}{a} \text{ Soit } \mathrm{U}_0 = \tau\frac{b'\mathrm{E}}{a}, \text{ or } \tau = \frac{a}{b} \text{ , donc } \mathrm{U}_0 = \frac{b'\mathrm{E}}{b}$$

La solution générale est alors de la forme :

$$\boxed{u(t) = \mathrm{K}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{b'\mathrm{E}}{b}}$$

Une fois que l'on a déterminé la forme générale de la solution (**et seulement à ce moment là**), on peut calculer la valeur de K grâce à la condition initiale $u(0) = 0$:

$$0 = \mathrm{K} + \frac{\mathrm{E}}{b} \; soit \; \mathrm{K} = -\frac{b'\mathrm{E}}{b}$$

Finalement :

$$\boxed{u(t) = \frac{b'\mathrm{E}}{b}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

b' et b ayant la même unité et E étant en volts, on vérifie bien que le résultat est homogène.

V. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à cœfficients constants

V.1 Équation du type $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \mathrm{E}$

Cette équation différentielle est caractéristique de ce que l'on appelle un oscillateur harmonique. E est ici une constante.

Du point de vue mathématique, il s'agit d'un cas particulier du cas général qui est traité dans la seconde partie de ce document de cours.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \mathrm{E}$$

est l'expression canonique de cette équation différentielle. On prendra donc soin de mettre l'équation sous cette forme avant de chercher à la résoudre.

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique (cf cours pour plus de détails sur l'oscillateur harmonique).

V.2 Solution

Les solutions sont du type :

$$u = u_{\mathrm{H}} + u_{\mathrm{SP}}$$

1. u_{H} est la solution générale de l'équation homogène.
2. u_{SP} est une solution particulière.

a) Détermination de la solution homogène

La solution homogène est de la forme :

$$u_{\mathrm{H}} : t \mapsto \mathrm{A}\cos(\omega_0 t) + \mathrm{B}\sin(\omega_0 t)$$

A et B sont deux constantes à déterminer grâce aux conditions initiales.
Elle peut aussi s'écrire sous la forme :

$$u_{\mathrm{H}} : t \mapsto \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les deux constantes à déterminer sont A et φ, φ s'appelle le déphasage.
Cette forme ***est à éviter sauf si on vous l'impose explicitement***. En effet, il est beaucoup plus délicat de déterminer φ que la constante B.
Remarque : Lors de l'étude du circuit RC, nous avons utilisé des équations différentielles du *premier* ordre. Dans ce cas *une seule constante* est à déterminer et il suffit *d'une seule condition initiale.*
Pour étudier le circuit RLC, nous utiliserons des équations du *second ordre*, il faudra donc déterminer *deux constantes* (A et B) à l'aide de *deux conditions initiales.*

b) Détermination de la solution particulière

On se place uniquement dans le cas où le second membre est une constante. Donc on cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction constante. On obtient alors :

$$u_{\mathrm{SP}}(t) = \mathrm{E}$$

V.3 Équation du type $\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \mathrm{E}$

a) Quelques remarques physiques

Vous ne trouverez pas une seule forme canonique, trois formes sont principalement utilisées en Sciences Physiques (mais on peut en trouver d'autres) :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \mathrm{E}$$

$$\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \mathrm{E}$$

$$\ddot{u} + \frac{\dot{u}}{\tau} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \mathrm{E}$$

Q est appelé le facteur de qualité de l'oscillateur, λ s'interprète comme un coefficient d'amortissement (résistance en électrocinétique, frottements en mécanique) et enfin τ est le temps de relaxation de l'oscillateur. On rappelle que ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur.
Les trois formes de l'équation différentielle permettront alors des interprétations physiques complémentaires.

b) Solution de l'équation homogène

On choisira de résoudre l'équation sous la forme :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

c) Équation caractéristique

Pour résoudre ce type d'équation différentielle, il faut d'abord résoudre une équation du second degré que l'on appelle équation caractéristique :

$$x^2 + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}x + \omega_0^2 = 0$$

La solution de l'équation différentielle va dépendre du signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique :

$$\Delta = \omega_0^2(\frac{1}{\mathrm{Q}^2} - 4)$$

Les différents cas correspondent à des régimes différents rappelés dans les paragraphes suivants.

d) $\Delta > 0$ (régime dit apériodique)

L'équation caractéristique possède deux racines réelles r_1 et r_2 :

$$r_i = -\frac{\omega_0}{2\mathrm{Q}} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4\mathrm{Q}^2} - 1}$$

La solution de l'équation homogène est alors :

$$\boxed{u_\mathrm{H} : t \ \mapsto \ \mathrm{A}e^{r_1 t} + \mathrm{B}e^{r_2 t}}$$

A et B étant des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

e) $\Delta = 0$ (régime dit critique)

L'équation du second degré possède alors une racine double réelle r :

$$r = -\frac{\omega_0}{2\mathrm{Q}}$$

La solution de l'équation différentielle est alors :

$$\boxed{u_\mathrm{H} : t \ \mapsto \ (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^{-\frac{\omega_0}{2\mathrm{Q}}t}}$$

A et B étant des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

f) $\Delta < 0$ (régime dit pseudo-périodique)

L'équation du second degré possède deux racines complexes r_1 et r_2 :

$$r_i = -\frac{\omega_0}{2\mathrm{Q}} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\mathrm{Q}^2}}$$

On pose alors $\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\mathrm{Q}^2}}$, ω_p est la pseudo-pulsation de l'oscillateur. La solution de l'équation différentielle est alors :

$$\boxed{u_\mathrm{H} : t \ \mapsto \ e^{-\frac{\omega_0}{2\mathrm{Q}}t}\left(\mathrm{A}\cos(\omega_p t) + \mathrm{B}\sin(\omega_p t)\right)}$$

Là encore A et B seront déterminés grâce aux conditions initiales.
La solution peut aussi écrire :

$$\boxed{u_\mathrm{H} : t \ \mapsto \ \mathrm{A}e^{-\lambda t}\cos\left(\omega_p t + \varphi\right)}$$

Forme à éviter sauf si il est inutile de déterminer φ.