TD n°17 : Propagation des ondes acoustiques dans les fluides

I. questions de cours

1. Quelles sont les hypothèses faites dans le cadre de l'approximation acoustique ?
2. Retrouver l'équation de d'Alembert pour la surpression
3. Définir le vecteur densité de puissance sonore (« vecteur de Poyting » sonore).
4. Donner l'expression de l'énergie volumique associée à l'onde sonore.
5. Donner l'expression de l'intensité acoustique en dB.
6. Donner les conditions aux limites que doit respecter une onde sonore à l'interface entre deux milieux.

II. Équation de D'Alembert à 3 dimensions

Montrer que la vitesse vérifie une équation de D'Alemnbert à 3D (sans utiliser l'équation déjà établie pour p).

III. Propagation d'une onde acoustique ♪

On s'intéresse à la propagation unidimensionnelle (selon Ox) d'ondes sonores dans un fluide. Un fluide, supposé parfait et soumis aux seules forces de pression, est caractérisé à l'équilibre par des valeurs uniformes P_0 de la pression et ρ_0 de la masse volumique. Du point de vue thermodynamique, ses évolutions sont considérées comme isentropiques, auxquelles correspond le coefficient de compressibilité χ_s. Le passage d'une onde sonore crée une perturbation et le fluide se déplace en de petits mouvements autour de l'équilibre, les champs de pression et de masse volumique devenant : $\mathrm{P}(x,t) = \mathrm{P}_0 + p(x,t)$ et $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$.

1. Qu'appelle-t-on approximation acoustique ? Quel est l'ordre de grandeur de la surpression p pour des ondes acoustiques dans l'air ?
2. Écrire et linéariser les équations locales de la mécanique des fluides et l'équation traduisant l'hypothèse thermodynamique effectuée. Établir l'équation de propagation des ondes acoustiques pour la surpression. Quelle est la célérité c de ces ondes ?
3. Dans le modèle du gaz parfait, établir la loi de variation de la célérité avec la température. Calculer c dans l'air dans les conditions normales de pression ($\mathrm{P}_0 = 1,0 \times 10^5$ Pa) à la température de 290 K.
4. La célérité des ondes acoustiques dans l'eau est de l'ordre de 1500 m.s^{-1}. Qu'est ce qui peut expliquer cette différence par rapport à celle trouvée dans l'air ?
5. Alors que l'on n'a aucun problème à localiser l'origine d'un son aérien, on est incapable, la tête sous l'eau, de déterminer dans quelle direction se situe un bateau dont on entend le bruit d'hélice. Pourquoi ?
6. À partir des mêmes équations précédentes, on peut établir l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\chi_s p^2\right) + \mathrm{div}\,(p\,\overrightarrow{v}) = 0$$

Quelle est la signification physique de cette équation ? Identifier et interpréter chacun de ses termes. Que représente notamment le flux de $p\,\overrightarrow{v}$ à travers une surface ? Citer une équation analogue dans un autre domaine de la physique.

IV. Ordres de grandeur en acoustique ♪

On considère une source sonore d'intensité 60 dB et de fréquence 1000 Hz dans l'air à 20°C
Calculer numériquement :

1. La pression acoustique efficace

2. La vitesse particulaire efficace
3. Le déplacement particulaire efficace
4. L'écart de température acoustique efficace $\Delta T = T_{eff} - T_0$

Commenter les applications précédentes. L'approximation acoustique est-elle valable ?

V. Intensité sonore ♪

1. Deux ondes sonores, dont l'une a une fréquence égale au double de l'autre, ont des amplitudes de déplacement égales. Laquelle de ces ondes correspond à la surpression de plus grande amplitude ?
2. Si l'amplitude d'une onde sonore est triplée, de combien l'intensité en dB augmente-t-elle ?
3. Quelle est l'intensité sonore en décibels d'une onde se propageant dans l'air pour laquelle l'amplitude de déplacement efficace des particules de fluide est de $0,1$ mm à 180 Hz ?
4. Si deux pétards qui explosent en même temps produisent une intensité sonore de 90 dB, quelle serait l'intensité sonore si un seul des deux pétards explosait ?

VI. Tuyau sonore ♪

On fait vibrer un diapason au dessus d'un tube vertical ouvert rempli d'eau. On fait baisser lentement le niveau de l'eau. Pendant que cela se produit, l'air au-dessus de l'eau résonne avec le diapason lorsque la distance entre la surface de l'eau et l'ouverture du tuyau est de $12,5$ cm puis de $37,5$ cm. Quelle est la fréquence du diapason ? On prendra $T = 20°C$

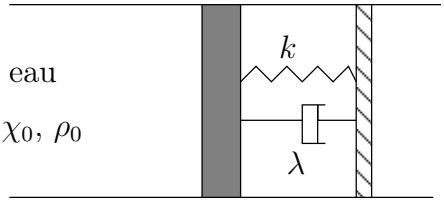
VII. Acoustique géométrique ♪

Interpréter qualitativement les observations suivantes, par analogie avec l'optique, en indiquant si elles relèvent ou non de l'approxiamtion de l'acoustique géométrique, analogue de l'optique géométrique.

1. On entend presque aussi bien un bruit extérieur lorsqu'une porte est entrouverte que lorsqu'elle est ouverte.
2. Le son direct au niveau du sol est rapidement atténué par les obstacles. curieusement, une explosion puissante est souvent mieux perçue loin de la source que près de celle-ci. Interpréter sachant que les ondes sonores rencontrent pour des altitudes comprises entre 50 et 80 km des couches d'air où la température croît avec l'altitude.

VIII. Adaptation d'impédance ♪♪

On envoie une onde acoustique dans l'eau vers un piston de masse m, relié à un amortisseur de cœfficient de frottement fluide λ. Le tuyau est un cylindre d'axe Oz, de section S.



1. On définit l'impédance acoustique de l'eau pour une onde plane progressive harmonique par $\underline{Z_a} = \dfrac{\underline{p}(z,t)}{\underline{u}(z,t)}$.
   Calculer l'impédance acoustique pour l'onde incidente et pour l'onde réfléchie. Définir de manière analogue l'impédance mécanique $\underline{Z}_m$ du piston, en fonction de m, k, S, λ et ω. À quelle(s) condition(s) y-a-t-il adaptation d'impédance ?
2. Établir le bilan énergétique.

IX. Isolation phonique (oral Centrale) ♪♪

Pour étudier l'atténuation sonore introduite par un mur, on adopte le modèle suivant : dans un tuyau de section S, une onde sonore incidente plane progressive harmonique de pulsation ω arrive sur un piston de surface S, d'épaisseur e et de masse volumique μ, libre de se déplacer au voisinage de $x = 0$. On cherche un champ des vitesse de la forme :

$$\underline{v_1}(x<0,t) = \mathrm{A_1}\exp(j\omega t - jkx) + \underline{\mathrm{B_1}}\exp(j\omega t + jkx) \text{ et } \underline{v_1}(x>e,t) = \underline{\mathrm{A_2}}\exp(j\omega t - jkx + jke)$$

1. Justifier cette forme et écrire les surpressions $\underline{p_1}(x,t)$ correspondantes.
2. Écrire les conditions aux limites sur le piston indéformable et en déduire que :
$$\frac{\underline{\mathrm{A_2}}}{\mathrm{A_1}} = \left(1 + \frac{\mu e j\omega}{2\mu_0 c}\right)^{-1}$$
3. En déduire le facteur de transmission en puissance T du mur. On donne $\mu_0 = 1,3$ kg.m^{-3}, $\mu = 2000$ kg.m^{-3} et $c = 340$ m.s^{-1}. Quelle doit être l'épaisseur minimale du mur si on veut une atténuation de 40 dB pour $f = 1$ kHz puis pour $f = 100$ Hz.

X. Méthode acoustique de détermination de la constante de Boltzmann ♪♪

Il s'agit de mesurer la vitesse des ondes acoustiques dans un gaz l'argon, en utilisant un résonateur sphérique de rayon a. Ces mesures sont effectuées à la température $\mathrm{T_{PT}}$ du point triple de l'eau, pour des pressions allant de $0,5$ à 7 bar.

On considère une onde acoustique plane, se propagenat selon l'axe Ox. Cette onde est décrite par le champ de surpression $\pi(x,t)$, le champ eulérien des vitesses $\overrightarrow{v}(x,t) = v(x,t)\overrightarrow{u_x}$ et le champ de mase volumique $\mu(x,t)$. Le milieu de propagation est un fluide caractérisé par sa masse volumique statique μ_0, sa pression statique $\mathrm{P_0}$ et sa compressibilité isentropique $\chi_\mathrm{S} = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial \mathrm{P}}\right)_\mathrm{S}$.

1. À la température $\mathrm{T_{PT}} = 273,16$ K, quel est l'ordre de grandeur de la pression P_{lim} en dessous de laquelle un gaz réel peut être décrit par le modèle du gaz parfait ? On considèrera que les interactions intermoléculaires ont une portée de l'ordre de 5 nm et qu'un gaz est parfait si les distances moyennes entre les molécules sont supérieures à la portée de l'interaction.
2. a) Établir, dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation de D'Alembert vérifiée par la surpression $\pi(x,t)$. En déduire l'expression de la célérité c_a des ones acoustiques en fonction de μ_0 et de χ_S.

   b) Exprimer la compressibilité isotherme $\chi_\mathrm{T} = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial \mathrm{P}}\right)_\mathrm{T}$ d'un gaz parfait. On montre que $\chi_\mathrm{S} = \dfrac{\chi_\mathrm{T}}{\gamma}$, où γ est le cœfficient de Laplace. En déduire que :
   $$c_a^2 = \frac{\gamma \mathcal{N}_a k_\mathrm{B} \mathrm{T}}{\mathcal{M}}$$
   où $\mathcal{M}$ est la masse molaire du gaz et T la température absolue.

   c) Pour un gaz réel, la célérité des ondes acoustiques est donnée, au premier ordre par rapport à la pression P, par :
   $$c_a^2 = \frac{\gamma \mathcal{N}_a k_\mathrm{B} \mathrm{T}}{\mathcal{M}}(1 + \beta \mathrm{P})$$
   où $\beta = 1,3 \times 10^{-11}\mathrm{P}a^{-1}$ pour l'argon. Pour quelles valeurs de la pression la célérité des ondes acoustiques dans l'argon ne s'écarte-t-elle pas e celle d'un gaz parfait de plus de 10^{-6} en valeur relative ?
3. L'incertitude relative sur k_B doit être au plus égale à 2×10^{-6}. Le tableau ci-dessous donne les valeurs et incertitudes relatives de diverses grandeurs, dont la masse molaire de l'argon ($\mathcal{M}_{\mathrm{A}r}$) et son cœfficient de Laplace ($\gamma_{\mathrm{A}r}$).

Valeur	**Incertitude relative**
$\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6,02214086 \times 10^{23}$ mol^{-1}	$1,2 \times 10^{-8}$
$\mathcal{M}_{\mathrm{A}r} = 39,94785$	$1,5 \times 10^{-6}$
$\gamma_{\mathrm{A}r} = 5/3$	0
$\mathrm{T} = \mathrm{T_{PT}} = 273,16$ K	3×10^{-7}

Déterminer l'expression de l'incertitude relative $\dfrac{\delta k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{B}}$ en fonction des incertitudes relatives des autres grandeurs. Quelle est la valeur maximale admissible de l'incertitude relative de la célérité des ondes acoustiques $\dfrac{\delta c_a}{c_a}$ dans l'argon à la température $\mathrm{T_{PT}}$?

Composition des incertitudes : si $f = g^\alpha h^\beta$ et g et h sont indépendants, alors :

$$\frac{\delta f}{f} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2}$$

XI. Détermination de la constante de Boltzmann à l'aide d'un résonateur sphérique♪♪♪

La méthode consiste à mesurer la vitesse des ondes acoustiques dans un gaz, l'argon, en utilisant un résonateur sphérique de rayon a. Ces mesures sont effectuées à la température $\mathrm{T_{PT}}$ du point triple de l'eau, pour des pressions statiques allant de $0,5$ à 7 bar.

En raison de la forme du résonateur, on étudie les ondes sonores qui possèdent la symétrie sphérique. En particulier, le champ de surpression s'écrit $\pi(r,t)$ et le champ des vitesses $\overrightarrow{v}(r,t) = v(r,t)\overrightarrow{u_r}$ où r est la coordonnée sphérique radiale et $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire associé.

1. Équation du potentiel
   a) Montrer qu'on peut définir un potentiel des vitesses $\phi(r,t)$. Relier une dérivée partielle du potentiel au champ de surpression et à la masse volumique μ_0, en considérant le potentiel identiquement nul si $\pi(r,t) = 0$ quel que soit le temps t.
   b) La surpression obéit à l'équation de d'Alembert généralisée

$$\Delta\pi(r,t) - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}(r,t) = 0$$

   Montrer que le potentiel des vitesses, vérifie la même équation.

   On cherche des solutions de la forme $\phi(r,t) = f(r)\cos(\omega t)$, appelées modes propres radiaux.
2. Les ondes sont confinées dans le résonateur (de rayon a). Quelle en est la conséquence sur l'ensemble des pulsations ω admissibles ? Les parois du résonateur sont supposées ici indéformables. En déduire une condition aux limites que l'on exprimera sur $f(r)$ ou ses dérivées.
3. Le vecteur densité de courant énergétique est défini par :

$$\overrightarrow{\jmath}_e(r,t) = \pi(r,t)\overrightarrow{v}(r,t)$$

   Exprimer $\overrightarrow{\jmath}_e(r,t)$ en fonction de f, f', μ_0 et ω.
   Interpréter la valeur moyenne $\langle \overrightarrow{\jmath}_e \rangle$.
4. Montrer que la fonction $rf(r)$ vérifie une équation classique dont on donnera les solutions, en posant $k = \dfrac{\omega}{c_a}$. L'amplitude des ondes doit être définie en tout point du volume du résonateur ; en déduire l'expression du potentiel $\phi(r,t)$ à une constante multiplicative près.
5. Donner l'expression de la fréquence de résonance ν_n des modes propres radiaux en fonction de la vitesse du son c_a, du rayon a du résonateur et de la n-ième racine non nulle x_n d'une fonction à préciser.
6. La précision exigée sur la valeur c_a nécessite des incertitudes sur la mesure du rayon a du résonateur et de la fréquence des modes suffisamment faibles. Les valeurs de ces grandeurs et leurs incertitudes relatives sont tabulées ci-dessous.

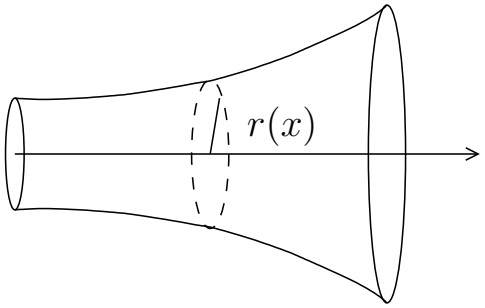
Valeur	**Incertitude relative**
$a = 5,0009087 \times 10^{-2}$ m	$1,8 \times 10^{-6}$
$\nu_1 = 4,402004068 \times 10^{3}$ Hz	5×10^{-10}
$x_1 = 4,49340945791$	2×10^{-11}

En déduire la valeur de la célérité c_a et l'incertitude relative $\dfrac{\delta c_a}{c_a}$. L'incertitude δc_a est-elle acceptable ?

7. Calculer la valeur de la constante de Boltzmann k_B déterminée par cette mesure, ainsi que son incertitude relative $\dfrac{\delta k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{B}}$ et son incertitude absolue δk_B. Combien de chiffres significatifs peut-on fixer par cette mesure ?
   Composition des incertitudes : si $f = g^\alpha h^\beta$ et g et h sont indépendants, alors :
$$\frac{\delta f}{f} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2}$$

XII. Pavillon acoustique ♪♪♪

Un pavillon acoustique de longueur L présente une symétrie de révolution autour de l'axe xx'. Son rayon est une fonction exponentielle croissante de x : $r(x) = r_0 \exp(x/d)$. dans une approximation assez grossière, on considère que les ondes sonores qui s'établissent dans le pavillon ne dépendent spatialement que de la variable x et que l'air qui transmet l'onde sonore est globalement au repos. En l'absence d'excitation, la pression est uniforme et égale à P_0, la température est uniforme et égale à T_0. On note : $\xi(x,t)$ le déplacement longitudinal de la tranche d'air au repos x ; $u(x,t)$ la vitesse de cette tranche d'air ; $p(x,t)$ la surpression acoustique.



1. Comment peut-on qualifier une onde du type $\xi(x,t)$? À quelle condition portant sur d la variation spatiale par rapport à x semble-t-elle être une bonne approximation ?
2. Soit μ_0 la masse volumique de l'air au repos. On notera $\mu = \mu_0 + \mu_1$, avec $\mu_1 \ll \rho_0$. Exprimer μ_0 en fonction des données et de la masse molaire du gaz. Soit χ_s le cœfficient de compressibilité isentropique de l'air, assimilé à un gaz parfait diatomique. Exprimer χ_S en fonction de P_0 et $\gamma = \mathrm{C}_p/\mathrm{C}_v$.
3. Justifier l'hypothèse isentropique pour les transformations thermodynamiques subies par l'air, siège de l'onde sonore. Établir alors une relation entre $p(x,t)$ et $\mu_1(x,t)$.
4. Faire un bilan de masse.
5. En appliquant la relation fondamentale à la tranche comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$, en déduire l'équation aux dérivées partielles (équation d'onde) qui régit les ondes acoustiques dans le pavillon exponentiel. Dans cette équation, on fera apparaître explicitement les caractéristiques χ_s et μ_0 du milieu.
   Quelle forme particulière l'équation précédente prend-elle si l'on fait tendre d vers l'infini ?
   Exprimer la célérité des ondes dans le milieu.
6. Le pavillon a une longueur finie L. Expliquer de manière qualitative pourquoi cela implique l'existence d'ondes progressives à la fois dans le sens des $x > 0$ et des $x < 0$. Expliquer qualitativement pourquoi la forme du pavillon atténue l'onde de retour.

❦