

TD N °2 : CHAMP ÉLECTROSTATIQUE, POTENTIEL, THÉORÈME DE GAUSS

I. Questions de cours

II. Propriétés de symétrie ♣

Vu en cours, le théorème de Gauss ne s'applique pas ici : le système n'est pas assez symétrique. Il n'y a pas de symétrie continue, il n'y a que des symétries discrètes.

III. Hexapôle électrostatique ♣

III.1 L'invariance de la distribution de charge selon z implique l'indépendance de $\vec{E}$ par rapport à z (idem pour V) :

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta) \text{ et } V = V(r, \theta)$$

III.2 L'ensemble de la distribution reste invariante par symétrie par rapport à un plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ puisque l'on néglige les effets de bord. $\vec{E}(M)$ n'a donc pas de composante selon z .

III.3 Les plans (Oz, C_i, C_{i+3}) sont plans de symétrie. Pour ces plans, on conclut que $\vec{E}$ n'a pas de composante selon $\vec{u}_\theta$.

D'après ce qui précède $\vec{E}$ est donc radiale en tout point M appartenant à ces plans.

III.4 Ce sont des plans d'antisymétrie pour la distribution. Pour M et M' , symétriques par rapport à ces plans : $V(M) = -V(M')$.

En particulier pour N appartenant au plan : $V(N) = -V(N)$. Le potentiel est nul sur ces plans.

III.5 $\frac{2\pi}{3}$.

IV. Charges sur un carré

idem à ce qui déjà été fait précédemment (penser aux plans de symétrie et d'antisymétrie, invariances par rotation de $\frac{\pi}{2}$, points de champ nul)

V. Équipotentiels

V.1 Non c'est le potentiel qui est le même.

V.2 orthogonale à l'équipotentielle, dans le sens des potentiels décroissant.

V.3 Oui (cf le cylindre chargé ou la boule)

V.4 Non puisqu'elles correspondent à deux potentiels différents.

VI. Muscler le calcul

VI.1
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1 \right) \vec{u}_z$$

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

VI.2

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} = \frac{\rho R^2}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r \text{ donc } V = -\frac{\rho R^2}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + Cte$$

VI.3

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial r E_r}{\partial r} = 0$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r \text{ donc } V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + Cte$$

VI.4

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

VII. Champ créé par une boule

cf cours.

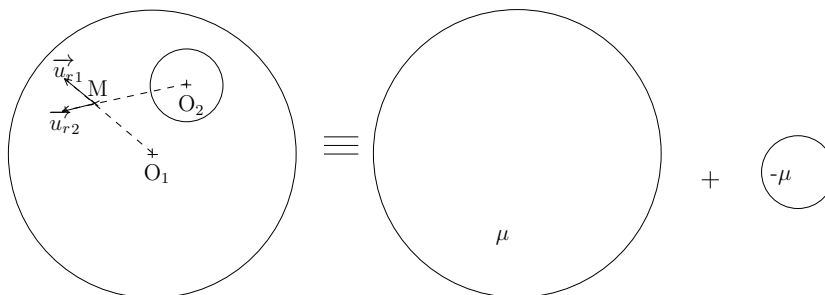
VIII. Champ créé par un cylindre

cf cours. Champ radial donc lignes de champ radiales. Charges positives donc lignes orientées vers l'extérieur.

IX. Champ gravitationnel de la Terre ♪

cf cours.

X. Grotte sphérique ♪♪



On raisonne par superposition d'une sphère de rayon R et de masse volumique μ de centre O et d'une sphère de rayon a et de masse volumique $-\mu$ et de centre O_1 (ou par soustraction ce qui revient au même).

En appliquant le théorème de Gauss pour une sphère et en superposant, on a alors au point M :

$$\vec{g} = -4\pi G \frac{\overrightarrow{O_1 M}}{3} + 4\pi G \frac{\overrightarrow{O_2 M}}{3} = \frac{4\pi G}{3} \overrightarrow{O_2 O_1}$$

En écrivant que $r_1 \vec{u}_{r_1} = \overrightarrow{O_1 M}$ et $r_2 \vec{u}_{r_2} = \overrightarrow{O_2 M}$

XI. Expérience de Millikan, détermination de e ♪♪

XI.1 Le champ $\vec{E}$ est dirigé vers le haut (sens des potentiels décroissant).

XI.2 Il suffit d'appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la goutte, on obtient alors :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9\eta}{2\mu R^2} \vec{v} = \vec{g}$$

On voit que la vitesse limite dépend de η . en mesurant cette vitesse limite en fonction de R^2 , on obtient une droite de coefficient directeur $\frac{2\mu g}{9\eta}$.

XI.3 On obtient une équation analogue ou $\vec{g}$ est remplacé par $\vec{g} + \frac{q}{m} \vec{E}$. L'équation du mouvement est :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9\eta}{2\mu R^2} \vec{v} = \vec{g} + \frac{q}{m} \vec{E}$$

La vitesse limite dépend de q qui est un multiple entier de e . La mesure de cette vitesse sur un grand nombre de goutte permet d'accéder à la valeur de e .

XI.4 Il y a un facteur 1000 entre la masse volumique de l'air et celle de la glycérine. Il est donc raisonnable de négliger la poussée d'Archimède.

XII. Les condensateurs utilisés comme capteur : hygromètre ♪♪

XII.1 Déterminons le potentiel et le champ :

XII.1.a À l'intérieur du condensateur la densité volumique de charge est nulle :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \text{ d'après l'équation de Maxwell-Gauss}$$

Or par définition du potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \text{ on en déduit } \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} V) = \Delta V = 0 \text{ (équation de laplace)}$$

XII.1.b Les plans sont infinis, le potentiel est donc invariant par translation quelconque selon z et r . Il ne dépend donc que de θ .

L'équation précédente s'écrit simplement :

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} = 0 \text{ soit } V(\theta) = A\theta + B$$

De plus

$$V(0) = V_1 \text{ et } V(\alpha) = V_2 \text{ ce qui permet de déterminer } A \text{ et } B$$

$$V(\theta) = \frac{V_2 - V_1}{\alpha} \theta + V_1$$

XII.1.c Il suffit alors d'écrire $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{V_1 - V_2}{\alpha} \vec{u}_\theta$$

XII.1.d En identifiant les expressions :

$$\frac{1}{r} \frac{V_1 - V_2}{\alpha} \vec{u}_\theta = \frac{\sigma(r, 0)}{\varepsilon} \vec{u}_\theta$$

$$\sigma(r, 0) = \frac{\varepsilon(V_1 - V_2)}{\alpha r}$$

La charge totale s'obtient en intégrant σ sur la surface :

$$Q = \iint \sigma dS$$

Comme σ est indépendant de z , on peut prendre $dS = L dr$

$$Q = \int_a^{a+\ell} \sigma L dr$$

$$Q = \frac{\varepsilon(V_1 - V_2)L}{\alpha} \ln \frac{a + \ell}{a}$$

XII.1.e De l'expression précédente, on déduit bien :

$$Q = C_1(V_1 - V_2) \text{ et que } C_1 = \frac{\varepsilon L}{\alpha} \ln \frac{a + \ell}{a}$$

XII.2 Dans ce cas, la capacité peut s'écrire :

$$C_1 = \frac{\varepsilon L}{e} a \ln \left(1 + \frac{\ell}{a} \right)$$

Comme a tend vers l'infini, on peut utiliser le DL de $\ln$ donné :

$$C_1 = \frac{\varepsilon L \ell}{e} \text{ Ce qui est bien la capacité du condensateur plan}$$

Avec le DL de C_1 à l'ordre 2 :

$$C_1 = \frac{\varepsilon L \ell}{e} - \frac{\varepsilon L \ell^2}{2a^2}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon L \ell}{e} - \frac{\varepsilon L \ell^2}{2a^2}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon L \ell}{e} - \frac{\varepsilon L \ell^2}{2a^2}$$

$$C_1 = C - \frac{C \alpha \ell}{2e}$$

XII.3 On obtient alors :

$$\frac{\delta C}{C} = \frac{\alpha \ell}{2e}$$

A.N :

$$\frac{\delta C}{C} = 15\%$$

La conception de ce type d'hygromètre demande donc une grande précision dans l'ajustement des armatures si on veut des résultats avec une incertitude raisonnable (moins de 5%).

XIII. Résolution de problème : L'empereur Palpatine (D'après Roland Lehoucq) ♪♪

Il suffit de se rappeler du champ disruptif de l'air. On en déduit la tension avec l'approximation :

$$E \approx \frac{U}{d}$$

Puis la puissance à l'aide du classique

$$\mathcal{P} = UI$$

XIV. Résolution de problème : Ligne Haute tension 🎵🎵🎵

Il faut penser à une modélisation du type fil ou cylindre. Le fil ne marche pas car le potentiel diverge en zéro. Il faut donc prendre un cylindre chargé en surface (plus proche de la réalité) ou en volume (ce qui ne change rien d'un point de vue théorique puisque l'on regarde le champ à l'extérieur).

Après l'étude des symétries (cylindrique ici), on obtient le champ puis le potentiel.

Il y a alors deux inconnues, la charge surfacique et la constante d'intégration. Il faut alors remarquer que le potentiel du sol est nul. Le potentiel en surface du fil vaut 300000 V.m^{-1} . Ces deux équations permettent de trouver la tension à un mètre. Le diamètre des câbles est de l'ordre de $10 - 14 \text{ cm}$. La hauteur est de l'ordre de 20 m . On aboutit à environ 100000 V pour la tension selon les ordres de grandeur choisis.

