

TD N °3 : DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE, CONDENSATEUR, ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE

I. Questions de cours

1. Décrire l'approximation dipolaire.
2. Établir l'expression du potentiel d'un dipôle, en déduire le champ, tracer l'allure des lignes de champ.
3. On place un dipôle dans un champ extérieur. Que se passe-t-il ?
4. Expliquer qualitativement la solvatation d'un ion en solvant polaire. .
5. Expliquer qualitativement pourquoi l'énergie d'interaction entre deux molécules polaires n'est pas en $\frac{1}{r^3}$.
6. En utilisant le modèle de Thomson, donner la polarisabilité d'un atome. Lien entre polarisabilité et volume ?
7. Établir le champ créé par un condensateur plan.
8. Établir le champ créé par une surface chargée.
9. Donner le champ disruptif dans l'air.
10. Donner l'expression de la densité volumique d'énergie dans un condensateur.
11. Énergie de constitution d'un noyau par analyse dimensionnelle.
12. Obtenir la valeur exacte de cette énergie par le calcul.

II. Calcul de surfaces et volumes

Soit un disque de rayon R :

1. À l'aide des surfaces élémentaires, calculer la surface du disque. Justifier que l'on peut retrouver ce résultat en découpant le disque en couronne d'épaisseur dr

Soit une boule de rayon a :

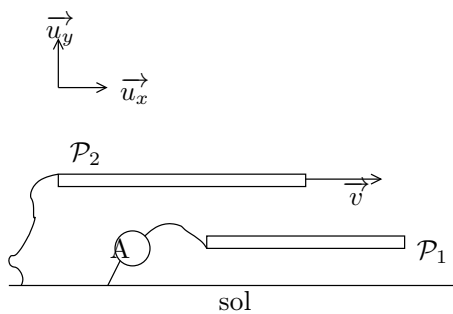
2. Calculer son volume à l'aide des volumes élémentaires. Justifier que l'on peut retrouver le résultat en découpant la boule en coquille sphérique d'épaisseur dr .

III. Sphère chargée en surface.

Calculer le champ et le potentiel créé par une sphère chargée en surface avec la densité surfacique σ . On notera a le rayon de la sphère. Remarques ?

IV. Charge surfacique de la Terre ♪♪

1. Il existe, même par beau temps, au voisinage du sol un champ électrique dont la norme est d'environ 100 V.m^{-1} et qui est dirigé vers le sol. Déterminer en ordre de grandeur et en signe la charge, σ_0 portée par le sol qui est un conducteur à l'équilibre. Le champ à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre est nul.
2. σ_0 peut se mesurer avec le dispositif suivant. Une plaque métallique $\mathcal{P}_1$ a la forme d'un carré dont les cotés sont parallèles à $\vec{u}_x$ et à $\vec{u}_y$, de longueur b_1 . Elle est placée parallèlement au sol, à faible distance de celui-ci, et reliée à ce dernier par un ampèremètre de grande sensibilité et de résistance interne nulle.
Une deuxième plaque $\mathcal{P}_2$ a la forme d'un carré de côté $b_2 > b_1$. Celle-ci se déplace parallèlement au sol à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$, juste au dessus de $\mathcal{P}_1$. $\mathcal{P}_2$ est reliée au sol par un long fil conducteur. Dans son mouvement, elle vient à recouvrir complètement $\mathcal{P}_1$.



- Déterminer les charges surfaciques portées par les deux faces de P_1 lorsque P_1 n'est pas recouvert puis lorsque P_2 la recouvre entièrement.
- Montrer que l'indication donnée par l'ampèremètre permet de trouver la valeur de σ_0 .

Données : $b_1 = 1 \text{ m}$, $v = 1 \text{ m.s}^{-1}$

V. Condensateur cylindrique ♪

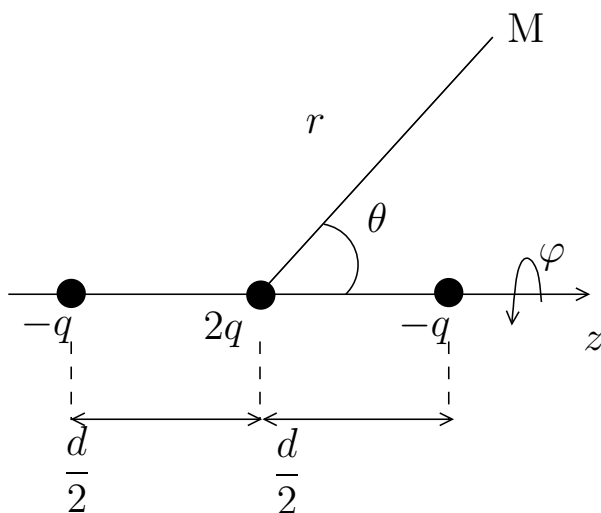
On considère deux cylindres conducteurs coaxiaux d'axe Oz , de rayons R_1 et R_2 (avec $R_1 < R_2$), de hauteur h . La hauteur h est grande devant R_1 et R_2 ; on néglige les effets de bords, ce qui revient à considérer que les cylindres sont infiniment longs.

Ces deux cylindres sont plongés dans un espace vide de charge ; les seules charges considérées sont portées par les cylindres. Le cylindre de rayon R_1 porte une charge $+Q$, le cylindre de rayon R_2 une charge $-Q$. L'armature 2 est à la masse.

- Déterminer les densités de charges surfaciques portées par les deux cylindres.
- À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace.
- En déduire le potentiel électrostatique dans tout l'espace.
- Déterminer la différence de potentielle $U = V(R_1) - V(R_2)$. En déduire la capacité de ce condensateur.
- Quelle est l'énergie stockée dans ce condensateur ?

VI. Champ quadrupolaire ♪

Calculer le premier terme non nul du potentiel créé à grande distance par la distribution représentée ci-dessous :



En déduire le champ $\vec{E}$.

VII. Force entre armatures des condensateurs ♪

On considère un condensateur plan composé de deux plaques de surface S distante de e . La charge des armatures est égale à Q et $-Q$.

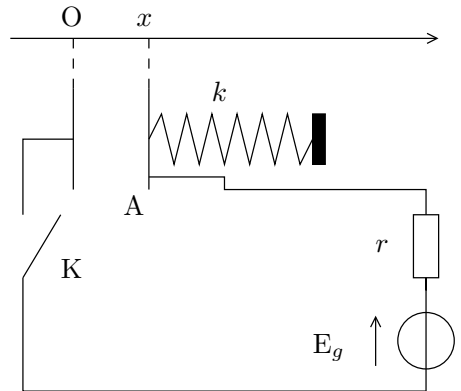
- Déterminer la capacité du condensateur formé. Combien vaut-elle pour une surface de 1 cm^2 (on choisira un ordre de grandeur adapté pour e) ?

- En remplaçant l'air par un matériau polymère, la capacité s'écrit de la même façon, mais il faut remplacer ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$. Où ε_r est la permittivité relative du milieu. Cette valeur est généralement comprise entre 2 et 3.
- Que vaut la nouvelle capacité ?
- Calculer la force exercée par une des armatures sur l'autre (on considérera le condensateur à air).

VIII. Condensateur et ressort ♪♪

Un condensateur est formé de deux armatures planes, de surface S . Les effets de bord sont négligés. L'une des armatures, A , est libre de se déplacer en translation selon Ox ; sa coordonnée x est aussi la distance entre les armatures. Sa charge Q est la charge du condensateur.

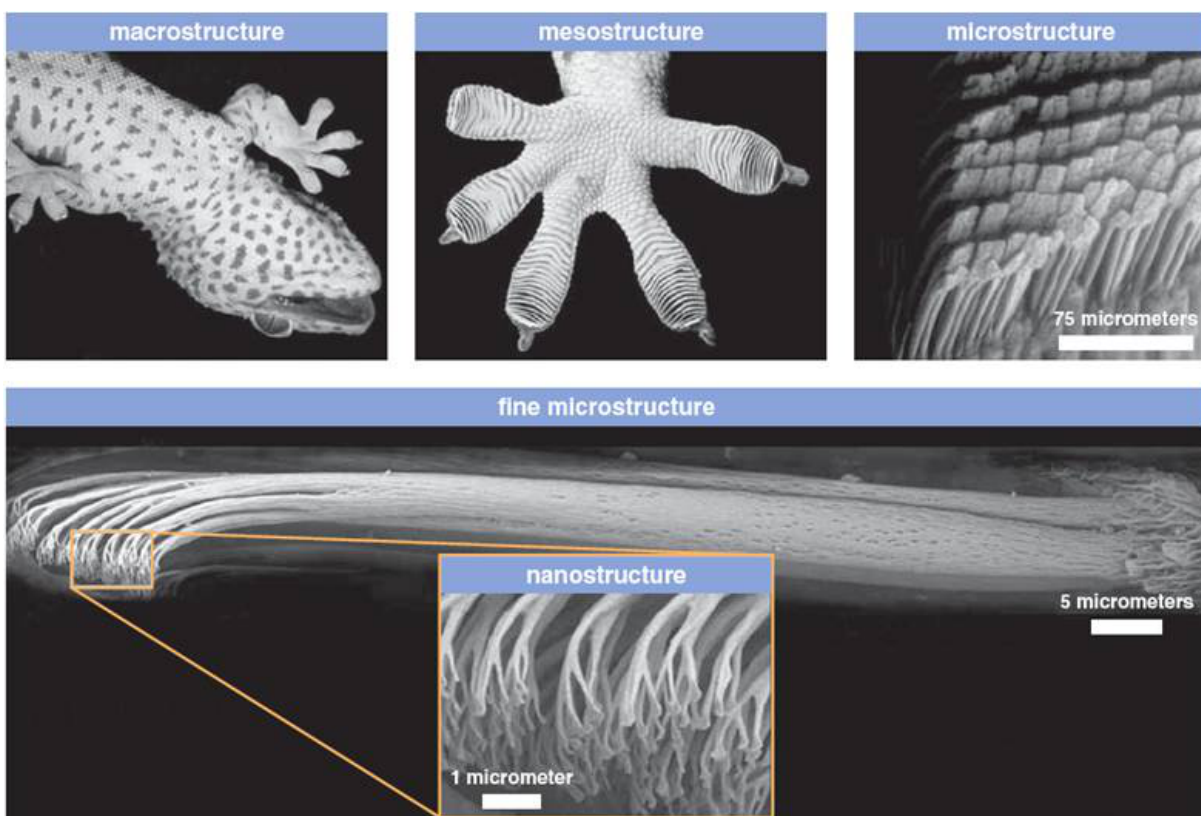
A est reliée à un ressort de constante de raideur k qui est au repos lorsque $x = x_0$; lorsqu'elle se déplace, elle est soumise à une force de frottements égale à $-\lambda \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$. Le condensateur est relié par des fils de résistance électrique r et un interrupteur K à un générateur de tension de f.é.m. E_g . K est ouvert. Le condensateur a donc une charge $Q = Q_0$ constante. On lâche l'armature A dans la position x_0 , sans vitesse initiale.



- Exprimer la force électrique s'exerçant sur A en fonction de Q_0 et S .
- Écrire l'équation différentielle du mouvement de A . Déterminer la position x_{eq} de A à l'équilibre.
- L'énergie électromécanique $\mathcal{E}_{em}$ du système formé par le condensateur et le ressort est, par définition, la somme de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur et de l'énergie mécanique du système formé par l'armature A et le ressort. Exprimer $\mathcal{E}_{em}$. Interpréter le fait que l'énergie électrostatique est proportionnelle à x . Montrer que :

$$\frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt} = -\lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

IX. Avoir un gecko au plafond ♪♪ (Centrale 2015, merci à Noémie Villers)



Comme on peut le voir sur les images micrométrique et nanométrique ci-dessus, les orteils « fractals » du gecko sont recouverts de sétules (microstructure) ou setae (forme de cheveux) qui se ramifient elles-mêmes en spatules ou spatulae (nanostructure). La taille des sétules et des spatules est minuscule. Chaque sétule contient plusieurs centaines voire milliers de spatules.

La surface d'une patte (orteils + voûte plantaire) de gecko est d'environ 220 mm^2 (soit moins qu'une pièce de 2 euros).

L'adhésion des sétules dépend de leur orientation. Kellar Autumn a montré que la force maximale exercée par une sétule est égale à $F_{max} = 200 \text{ } \mu\text{N}$.

(Photographies : Kellar Autumn)

On donne :

$$U(r) = -\frac{C}{r^6} \text{ avec } C > 0, \text{ énergie potentielle liée aux forces de Van der Waals}$$

Typiquement : $C = 10^{-80} \text{ J.m}^6$

1. Quelle est l'origine de l'interaction de Van der Waals ? La force est-elle attractive ou répulsive ? Justifier.
2. On considère deux plans de molécules distants de h . L'énergie potentielle surfacique associée est :

$$U(h) = \frac{-A}{12\pi h^2} \text{ avec } A = \pi^2 C N_1 N_2 \text{ où } N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont les densités volumiques atomiques de chacun des corps.}$$

- a) Donner l'expression de la force surfacique associée $\Lambda(h)$, exercée par le plan 1 sur le plan 2.
 - b) Que vaut Λ lorsque h tend vers 0 ? Que peut-on dire ?
 - c) En réalité, il existe une distance minimale, notée h_{min} que l'on ne peut pas dépasser. Donner l'expression de Λ_{max} et le calculer à partir d'un ordre de grandeur établi sur h_{min} . On prendra pour la béta-keratine qui compose les sétules une masse volumique de l'ordre de $\mu = 500 \text{ kg.m}^{-3}$.
3. On considère un gecko sur un mur.
Le gecko a une masse de 30 g. Calculer la surface d'accroche qui permet au gecko de tenir au plafond.
 4. Par deux méthodes différentes évaluer le nombre de sétules dont le gecko a besoin pour rester accroché. Comparer au nombre de sétules qui se trouvent effectivement sur les pattes du gecko. Pourquoi en a-t-il autant ? Quelle est la masse théorique qu'un gecko pourrait supporter ?
 5. Comment fait-il pour courir très vite sur le plafond ?

X. Charge variable en surface 🎶🎶🎶

On considère une sphère chargée en surface avec la charge $\sigma \cos \theta$.

Montrer que cette distribution est équivalente à deux sphères de rayon a et de charge volumique respectives ρ et $-\rho$ de centres O_1 et O_2 lorsque O_1 tend vers O_2 . On exprimera σ en fonction de ρ et a .

En déduire le potentiel loin de la sphère.

