TD n °3 : Dipôle électrostatique, condensateur, énergie électrostatique

I. Questions de cours

II. Calcul de surfaces et volumes

III. Sphère chargée en surface.

Avec le théorème de Gauss et les symétries : nul à l'intérieur. et

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon r^2}\ r > a$$

IV. Charge surfacique de la Terre ♪♪

La charge de la Terre est négative et il n'y a pas de charges à l'intérieur d'un conducteur. Les charges qui étaient sous $\mathcal{P}_1$ passe donc sur la plaque. Lorsque $\mathcal{P}_\in$ vient la recouvrir, le même phénomène se produit. Les charges passent alors par les fils et l'ampèremètre d'où le courant mesuré. Ces charges sont transférées au fur et à mesure de l'avancée de $\mathcal{P}_\in$.

La quantité de charge transférée lorsque la plaque a avancé de x par rapport au bord de $\mathcal{P}_\infty$ est donc :

$$\delta q = \sigma_0 b_1 \times x \text{ avec } x = v\delta t$$

$$i = \sigma_0 b_1 v \text{ tant que la plaque n'a pas recouvert complètement la première.}$$

La mesure de i permet donc de remonter à la charge surfacique de la Terre.

V. Condensateur cylindrique ♪

V.1 Pour le cylindre 1 : $\sigma_1 = \dfrac{\mathrm{Q}}{2\pi \mathrm{R}_1 h}$ et $\sigma_2 = \dfrac{-\mathrm{Q}}{2\pi \mathrm{R}_2 h}$. Contrairement au condensateur plan, la densité surfacique n'est pas identique en valeur absolue au vu de la géométrie du système.

V.2 Étude des symétries : Les plans $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ et $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ sont plans de symétrie de la distribution de charge. Le champ est donc selon $\overrightarrow{u_r}$. Le système est invariant par translation quelconque selon z et par rotation quelconque selon θ. Donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_r(r)\overrightarrow{u_r}$$

On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h. D'après le théorème de Gauss puisque la charge intérieure est nulle pour $r < \mathrm{R}_1$ alors le champ est nul dans cette zone :

$$r < \mathrm{R}_1 : \mathrm{E}_r(r).2\pi r h = 0$$

Au delà :

$$\mathrm{R}_2 > r > \mathrm{R}_1 : \mathrm{E}_r(r).2\pi r h = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{E}_r(r) = \frac{\mathrm{Q}}{2\varepsilon_0 \pi r h} \text{ pour } \mathrm{R}_2 > r > \mathrm{R}_1$$

À l'extérieur la charge totale est nulle, le champ est donc nul par le même raisonnement que précédemment.

Remarque : il faut bien l'étude des symétries et le théorème de Gauss pour affirmer la nullité du champ. La nullité de la charge seule permet seulement d'affirmer la nullité du flux.

V.3 Le potentiel vaut entre R_1 et R_2 :

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \pi r h}$$

$$V(r) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln(r) + Cte$$

Comme l'armature 2 est à la masse alors :

$$V(R_2) = 0 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln(R_2) + Cte$$

$$Cte = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln(R_2)$$

Donc :

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{R_2}{r}\right)}$$

V.4 De la question précédente, on déduit :

$$\boxed{U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

La capacité est définie par : $Q = CU$, donc :

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

V.5 Par définition :

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 h U^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

VI. Champ quadrupolaire ♪

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(2 - \left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$V(r) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(2 - \left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta - \frac{d^2}{8r^2} + \frac{3d^2}{8r^2}\cos^2\theta\right) - \left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta - \frac{d^2}{8r^2} + \frac{3d^2}{8r^2}\cos^2\theta\right)\right)$$

On en déduit le champ électrique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u_\theta}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\frac{1 - 3\cos^2\theta}{4}\vec{u_r} - \frac{qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\frac{3\sin(2\theta)}{4}\vec{u_\theta}}$$

VII. Force entre armatures des condensateurs ♪

VII.1 cf cours. Si on prend une épaisseur de 4 mm (condensateur de TP) : on obtient :

$$\mathrm{C} = 0,2 \text{ pF}$$

VII.2 On atteint $0,6$ pF au maximum pour la capacité.

VII.3 Considérons l'armature +Q. Elle est soumise au champ de l'autre armature :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}_{-} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ (cf calcul du cours)}$$

Le champ étant uniforme, on obtient alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = \mathrm{Q}\overrightarrow{\mathrm{E}}_{-}$$

Si le champ n'était pas uniforme, il faudrait intégrer $\mathrm{d}q\overrightarrow{\mathrm{E}}$ sur l'armature.

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{Q}\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\frac{\mathrm{Q}^2}{2\varepsilon_0\mathrm{S}}\overrightarrow{u_z}$$

Force bien évidemment attractive (cohérent avec le signe des charges).

VIII. Condensateur et ressort ♪♪

VIII.1 L'armature opposée à A est de charge $-\mathrm{Q}_0$. Elle créée un champ :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\mathrm{Q}_0}{2\varepsilon_0\mathrm{S}}\overrightarrow{u_x} \text{ (à savoir démontrer)}$$

Le champ étant uniforme :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\frac{\mathrm{Q}_0^2}{2\varepsilon_0\mathrm{S}}\overrightarrow{u_x}$$

VIII.2 Attention, l'allongement du ressort n'est pas dans le sens de l'axe et la longueur ℓ n'est pas égale à x.

On se place dans le référentiel terrestre galiléen. Le système est supposé horizontal.

Ainsi si on note x_1 l'abscisse du point d'accroche : $\ell = x_1 - x$ et $\ell_0 = x_1 - x_0$. On calcule donc la tension du ressort de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{T}} = k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$$

(Pour être sûr : supposer que ℓ est supérieure à ℓ_0, en déduire le sens de $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ sachant que le ressort est tendu et comparer au sens donné par la formule précédente).

$$\overrightarrow{\mathrm{T}} = k(x_1 - x - (x_1 - x_0))\overrightarrow{u_x} = -k(x - x_0)\overrightarrow{u_x}$$

On remarquera que l'on retombe sur « la formule habituelle » mais ce n'est pas direct !

D'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$\overrightarrow{\mathrm{T}} - \lambda\frac{dx}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{\mathrm{F}} = m\ddot{x}\overrightarrow{u_x}$$

$$-k(x - x_0) - \lambda\frac{dx}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x} - \frac{\mathrm{Q}_0^2}{2\varepsilon_0\mathrm{S}}\overrightarrow{u_x} = m\ddot{x}\overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}(x - x_0) = -\frac{\mathrm{Q}_0^2}{2m\varepsilon_0\mathrm{S}}}$$

En annulant la vitesse et l'accélération, on trouve la position d'équilibre :

$$x = x_0 - \frac{\mathrm{Q}_0^2}{2k\varepsilon_0 \mathrm{S}}$$

Puisque la force électrostatique est attractive, il est cohérent de trouver une valeur de x inférieure à x_0.

VIII.3 La force est constante, il est donc cohérent de trouver une énergie proportionnelle à x :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{E}_p = -\frac{\mathrm{dE}_p}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}.$$

$$\boxed{\mathrm{E}_p = \frac{\mathrm{Q}_0^2 x}{2\varepsilon_0 \mathrm{S}}}$$

D'où l'énergie potentielle totale, en prenant comme origine de l'énergie potentielle x_0 :

$$\mathrm{E}_p = \frac{\mathrm{Q}_0^2(x-x_0)}{2\varepsilon_0 \mathrm{S}} + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

L'énergie mécanique est donc :

$$\mathrm{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\mathrm{Q}_0^2(x-x_0)}{2\varepsilon_0 \mathrm{S}} + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\frac{d\mathrm{E}_m}{\mathrm{d}t} = m\ddot{x}\dot{x} + \frac{\mathrm{Q}_0^2\dot{x}}{2\varepsilon_0 \mathrm{S}} + k\dot{x}(x-x_0)$$

En mettant en facteur $\dot{x}$ et en remplaçant par la relation fondamentale de la dynamique, on trouve :

$$\boxed{\frac{d\mathrm{E}_m}{\mathrm{d}t} = -\lambda\dot{x}^2}$$

Nous venons en fait de redémontrer le théorème de la puissance mécanique dans ce cas particulier.

IX. Avoir un gecko au plafond ♪♪(Centrale 2015, merci à Noémie Villers)

IX.1 cf cours. Énoncer les différents type d'interaction dipolaire. Le potentiel associé est négatif, l'interaction est attractive.

IX.2 Ordre de grandeur sur la force :

IX.2.a La force associée dérive du potentielle, la force exercée par le plan 1 sur le plan 2 est alors :

$$\overrightarrow{\Lambda}(h) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{U}(h)) = -\frac{\mathrm{A}}{6\pi h^3}\overrightarrow{u} \text{ où } \overrightarrow{u}, \text{ unitaire dirigé de 1 vers 2}$$

IX.2.b La force diverge pour h tendant vers 0. À courte distance, le modèle d'interaction dipolaire n'est plus valable, c'est la répulsion entre nuages électroniques qui domine.

IX.2.c On peut prendre l'ordre de grandeur d'une distance interatomique, soit environ $h_{min} = 100$ pm. Pour N_1 et N_2, on prend le même ordre de grandeur.

Avec une masse molaire de l'ordre de $\mathcal{M} \approx 10$ g.mol^{-1}, $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}, le nombre d'Avogadro :

$$\mathrm{N} = \frac{\mu\mathcal{N}_\mathrm{A}}{\mathcal{M}} \approx 3.10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$$

$$\Lambda_{max} \approx 4,7.10^6\ \mathrm{N.m}^{-2}$$

IX.3 À l'équilibre :

$$mg = \Lambda_{max}\mathrm{S} \text{ donc } \mathrm{S} \approx 6.10^{-2}\ \mathrm{mm}^2$$

Vu la surface des pattes, le gecko colle au plafond. D'après ce calcul, seul $0,006\%$ de la surface de ses pattes sert à l'adhésion.

IX.4 Une sétule occupe environ 225 μm^2 (carré d'environ $15 \times 15 \mu m^2$, d'après la photo et l'échelle de la microstructure). D'après le calcul précédent, on a donc environ 270 sétules utilisées.

Si on utilise le fait qu'une sétule soutient exerce une force de 200 μN, on obtient : 1500 sétules.

On voit que l'écart est assez important mais il est tributaire du choix de l'ordre de grandeur de la masse molaire. On voit que pour une masse de 25 g.mol^{-1} qui reste acceptable, on obtient $\Lambda_{max} \approx 7,5.10^5$ N.m^{-2}, une surface de contact de $0,4$ mm^2 donc 1730 sétules. Dans ce cas les ordres de grandeurs sont comparables pour une faible variation de masse molaire.

L'ordre de grandeur est cohérent.

IX.5 La surface totale des pattes étant de 880 mm^2, on obtient $4,9.10^6$ sétules si une sétule occupe 225 μm^2. Kellar Autumn l'a estimé à $6,5$ millions. Le chiffre est donc cohérent.

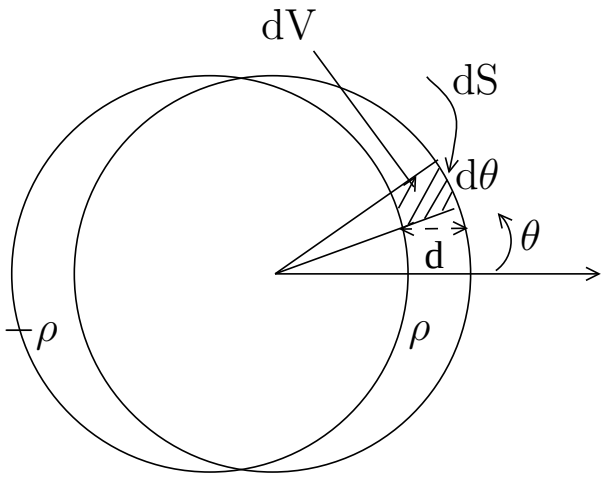
Si une sétule supporte 220 μN alors la masse théorique supportée est de : 86 kg !

Si le gecko a autant de sétules c'est que tout n'est pas parfait : les poussières accrochées au surface empêche une partie des sétule d'accrocher, les surfaces ne sont pas parfaitement planes.

IX.6 L'orientation des sétules, donc la géométrie de leur implantation permet au gecko de décoller sa patte très facilement. Autrement dit, on a montré que la force d'adhésion de la sétule dépendait fortement de l'orientation de la sétule par rapport à la surface. Au delà de 30°, les sétules se détachent facilement.

X. Charge variable en surface ♪♪♪

Considérerons 2 sphères $-\rho$ et $+\rho$. En approchant les sphères de manière à ce que les centres soient très proches ($d \ll a$).



La charge comprise dans un angle dθ entre les deux sphères est :

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{dV} \text{ avec } \mathrm{dV} = d\cos\theta \mathrm{dS}$$

$$\mathrm{d}q = \rho d\cos\theta \mathrm{dS}.$$

Pour que le modèle soit équivalent, il faut imposer :

$$\boxed{\sigma = \rho d}$$

Puisque la sphère est équivalente à deux boules chargées très proches, nous allons utiliser ce modèle. Or vu de l'extérieur une boule est équivalente à une charge ponctuelle de même charge. Les deux boules sont donc équivalentes à un dipôle vues de l'extérieur. Il suffit donc de reprendre le raisonnement du cours pour calculer le champ dipolaire.

On obtient alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_r} + \frac{2p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\boxed{\text{Avec : } p = \mathrm{Q}d = \rho\frac{4}{3}\pi a^3 d = \frac{4}{3}\sigma\pi a^3}$$

❦