TD n °4 : Magnétostatique, dipôle magnétique

I. Questions de cours

II. Symétrie du champ ♪

II.1 Pour le carré :

- Le plan Oyz est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant. Sur ce plan $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est inclus dans le plan.
- Même raisonnement pour le plan Oxz et les plans diagonaux Π_1 et Π_2 et le plan de la la feuille $0xy$.
- Le plan de la feuille $0xy$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est orthogonal à ce plan.
- Le carré est invariant par rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, donc on retrouve cette symétrie pour le champ.

II.2 Pour la spire :

- Le plan de la spire (Oxy) est plan de symétrie de la distribution de courant. $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est orthogonal à ce plan.
- Tous les plans $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant. $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ appartient donc à ces plans. En particulier sur l'axe $0z$, $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est selon l'axe.
- La distribution de courant est invariante par rotation quelconque d'angle θ, $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est donc indépendant de θ.

II.3 Pour deux spires :

- On garde les mêmes symétries que pour la spire, si on note O le milieu du segment qui relie les centres des deux spires.
- Attention les plans des spires ne sont plus plan de symétrie.

III. Est-ce un champ magnétique ? ♪

la carte (b) n'est pas une carte de champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ qui ne peut pas diverger d'un point. Idem pour (f).

Le cas (a) peut correspondre à un pavé infini mais le champ n'est pas uniforme. (c), (d) et (e) tournent autour de leurs sources. Mais pour (e) le champ ne décroit pas lorsque l'on s'éloigne de la source.

On peut donc aussi écarter (a) et (e).

IV. Tokamak ♪

Les plans $\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z}$ sont plans de symétrie de la distribution de courant, $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est selon $\overrightarrow{u_\theta}$. La distribution de courant est invariante par rotation autour de z, le champ est indépendant de θ.

Donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{B}}(r, z)\overrightarrow{u_\theta}$$

Il est encore possible d'utiliser le théorème d'Ampère sur un cercle d'axe centré sur Oz, dans un plan parallèle à Oxy. Dans ce cas :

$$\mathrm{B}_\theta 2\pi r = \mu_0 \mathrm{I}_{enl.}$$

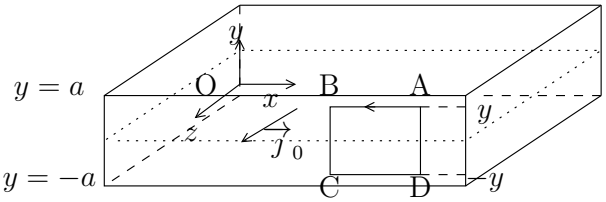
À l'intérieur du tore : $\mathrm{I}_{enl.} = \mathrm{NI}$ à l'extérieur : $\mathrm{I}_{enl.} = \mathrm{NI} - \mathrm{NI} = 0$

On en déduit que le champ est nul à l'extérieur et qu'à l'intérieur :

$$\mathrm{B}_\theta 2\pi r = \mu_0 \mathrm{I}_{enl.} \text{ soit : } \mathrm{B}_\theta = \frac{\mu_0 \mathrm{I}_{enl.}}{2\pi r}$$

V. pavé ♪♪

On suppose que l'épaisseur du pavé est selon l'axe y (entre $y = -a$ et $y = a$), il est infini selon x et z. Tout plan Myz est plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est donc selon x.



L'invariance par translation quelconque selon x et z nous permet d'affirmer que B ne dépend que de y.

Le plan Oxz est plan de symétrie. $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est une fonction impaire de y : $\mathrm{B}_x(y) = -\mathrm{B}_x(-y)$

$\overrightarrow{\mathrm{B}}$ selon une seule direction, dépend d'une seule variable. On utilise le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire de longueur x et d'épaisseur $2y$ contenu dans le plan Mxy à cheval sur le plan médian du pavé.

D'après le théorème d'Ampère :

$$\oint \overrightarrow{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 \mathrm{I}_{\text{enlacé}}$$

On obtient alors si $-a < y < a$:

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{B}_x(y)\overrightarrow{u_x}\mathrm{d}\ell - (\overrightarrow{u_x}) + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \mathrm{B}_x(-y)\overrightarrow{u_x}\mathrm{d}\ell(\overrightarrow{u_x}) = -2\mathrm{B}_x(y).x = \mu_0 j 2yx$$

Puisque le champ magnétique est orthogonal à AD et BC

$$\mathrm{B}_x = -\mu_0 j y$$

Sinon :

$$2\mathrm{B}_x(y).x = \mu_0 j 2ax$$

$$\mathrm{B}_x = -\mu_0 j a \text{ si } y > a$$

$$\mathrm{B}_x = +\mu_0 j a \text{ si } y < -a$$

On vérifie la continuité du champ magnétique (cohérent puisqu'il s'agit d'une distribution volumique). On vérifie également que $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est dans le bon sens par rapport à $\overrightarrow{j}_0$ par la règle du tir-bouchon).

Rem : si vous avez choisi d'orienter le courant vers le fond, vous trouvez bien entendu l'opposé de ce résultat.

VI. Champ magnétique terrestre ♪♪

VI.1 Il faut dessiner la boucle de courant associée au moment (sens du courant en cohérence avec l'orientation du moment -règle du tir bouchon). On retrouve bien que le champ est dans le plan $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et l'invariance selon φ.

VI.2 Au pôle nord, $\theta = \pi$, $r = \mathrm{R_T}$:

$$\mathcal{M} = \frac{2\pi \mathrm{B}_0 \mathrm{R}_\mathrm{T}^3}{\mu_0}$$

A.N : $\mathcal{M} = 7,9.10^{22}$ A.m^2.

VI.3 Attention le moment est orienté vers le bas : $\theta = 90 + 48 = 138°$ à convertir en radian ($2,4$ rad). la longitude (φ) n'a pas d'importance puisque $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ ne dépend pas de φ.

$$\mathrm{B}_r = -4,5.10^{-5} \text{ T et } \mathrm{B}_\theta = 4.10^{-5} \text{ T}$$

VII. Champ magnétique terrestre♪♪♪

VII.1 Je vous renvoie au cours.

VII.2 Il faut projeter d'abord dans la base sphérique grâce à la formule donnée, l'axe z est dirigé vers le pôle sud (dans le sens de $\mathcal{M}$), la base est sphérique et $\theta = \lambda + \frac{\pi}{2}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(3\mathcal{M}_z r^2.\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_z})\overrightarrow{u_r} - r^2\mathcal{M}_z\overrightarrow{u_z}}{r^5}$$

Or $\overrightarrow{u_z} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$ voir le poly analyse vectoriel

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}_z\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} + \mathcal{M}_z\sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}}{r^3}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\mu_0 \mid \mathcal{M}_z \mid}{\mathrm{R}^3}\sqrt{1+3\cos^2(\theta)}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\mu_0 \mid \mathcal{M}_z \mid}{\mathrm{R}^3}\sqrt{1+3\cos^2(\theta)}$$

$$\mid \mathcal{M}_z \mid = \frac{4\pi\mathrm{R}^3\mathrm{B}}{\mu_0\sqrt{1+3\cos^2(\theta)}} \text{ avec } \theta = 138,75°$$

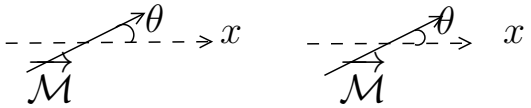
A.N :

$$\boxed{\mathcal{M}_z = 7,4.10^{22} \text{ A.m}^2}$$

VII.3 Dans le premier cas, les deux champs s'ajoutent (vers la droite). Dans le second, les deux champs se soustraient (champ total vers la gauche).

cas 1 cas 2

$\overrightarrow{\mathrm{B}_t} = \overrightarrow{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{B}_h}$ $\overrightarrow{\mathrm{B}_h} - \overrightarrow{\mathrm{B}}$



D'après le théorème du moment cinétique appliqué au pendule :

$$\mathrm{J}\ddot{\theta} = (\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}).\overrightarrow{u_z}$$

$$\mathrm{J}\ddot{\theta} = -m\mathrm{B}_1\sin\theta \text{ dans le cas 1 et } \mathrm{J}\ddot{\theta} = m\mathrm{B}_2\sin(\pi-\theta) \text{ dans le cas 2}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{m\mathrm{B}_1}{\mathrm{J}}\theta = 0 \text{ dans le cas 1 et } \ddot{\theta} + \frac{m\mathrm{B}_2}{\mathrm{J}}\theta = 0 \text{ dans le cas 2}$$

Avec $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B} + \mathrm{B}_h$ (somme des normes) et $\mathrm{B}_2 = \mathrm{B} - \mathrm{B}_h$ (car $\mathrm{B} > \mathrm{B}_h$).
On voit que la fréquence est d'autant plus grande que le champ est intense. T_1 correspond donc à la somme des champs (période la plus petite) tandis que T_2 correspond à la différence (période la plus grande). On a noté B_h la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

$$\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2} = \frac{\sqrt{\mathrm{B}-\mathrm{B}_h}}{\sqrt{\mathrm{B}+\mathrm{B}_h}}$$

$$\boxed{\mathrm{B}_h = \frac{1 - \left(\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}\right)^2}\mathrm{B}}$$

A.N. :

$$\boxed{\mathrm{B}_h = 24\ \mu\mathrm{T}}$$

VII.4 Aux alentours de Paris (3e courbe au dessus de 45000), on mesure bien 47000, au vu des ordres de grandeur, il s'agit de nT. Cela correspond bien à la valeur donnée dans le texte.
L'inclaison est l'angle que le champ fait avec l'horizontale. Donc :

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{B}_h}{\cos(\mathrm{I})} = 54\mu\mathrm{T}$$

Résultat qui colle avec les mesures.

VIII. Circuit en forme de V ♪♪

Il faut penser à déformer le V en un fil infini ce qui permet de trouver k. Pour trouver en le champ en P′, il suffit de de remplacer α par $\pi - \alpha$.

VIII.1 En utilisant la règle du tir-bouchon, on voit que $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ doit sortir de la feuille. De plus le plan de la feuille est un plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique est donc orthogonal à la feuille.

VIII.2 Si on déforme le fil, on retrouve le fil infini pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc :

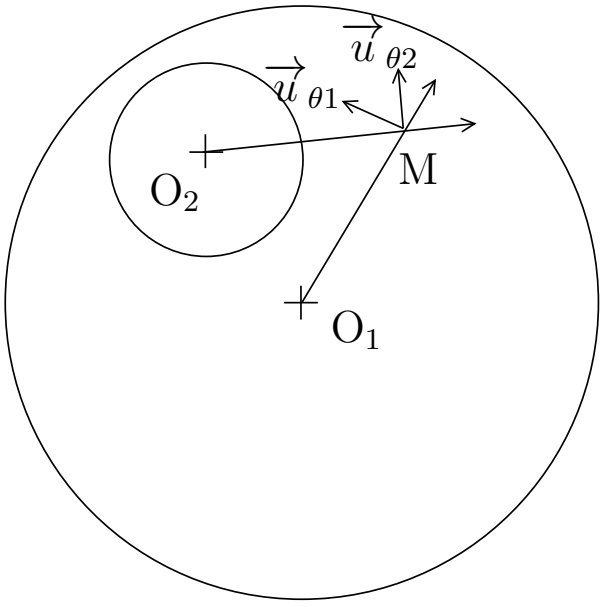
$$\boxed{\mathrm{B} = k = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r}}$$

VIII.3 Passer de P à P′ revient à changer α en $\pi - \alpha$.

$$\boxed{\mathrm{B} = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r}\tan(\frac{\pi - \alpha}{2}) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r}\,\mathrm{cotan}\,(\frac{\alpha}{2})}$$

IX. Cylindre creux ♪♪

C'est le calcul du câble vu en cours auquel on ajoute le théorème de superposition.



On considère la superposition de deux cylindres, l'un de rayon a parcouru par $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{u_z}$, l'autre de rayon b parcouru par $-\overrightarrow{j} = -j\overrightarrow{u_z}$.

Je vous renvoie au cours pour le calcul et l'étude des symétries :

$$\overrightarrow{\mathrm{B}}_1 = \frac{\mu_0 jr}{2}\overrightarrow{u_{\theta 1}} = \frac{\mu_0 jr}{2}\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_{r1}} = \frac{\mu_0 j}{2}\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O_1M}}$$

De même :

$$\overrightarrow{\mathrm{B}}_2 = -\frac{\mu_0 jr}{2}\overrightarrow{u_{\theta 2}} = -\frac{\mu_0 jr}{2}\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_{r2}} = -\frac{\mu_0 j}{2}\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O_2M}}$$

La somme des deux champs est alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{B}}_1 + \overrightarrow{\mathrm{B}}_2 = \frac{\mu_0 j}{2}\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}}$$

X. Interactions entre deux moments magnétiques ♪♪

X.1

$$\mathrm{E}_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_2.\overrightarrow{\mathrm{B}}_1(\mathrm{M}) = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_1.\overrightarrow{\mathrm{B}}_2(\mathrm{O})$$

$$\mathrm{E}_p = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{\mathcal{M}}_1.\overrightarrow{u_r})(\overrightarrow{\mathcal{M}}_2.\overrightarrow{u_r}) - \overrightarrow{\mathcal{M}}_1\overrightarrow{\mathcal{M}}_2}{r^3}$$

X.2 Si les dipôles sont colinéaires à $\overrightarrow{u_r}$:

$$\mathrm{E}_p = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_1}{r^3} \text{ d'où } \overrightarrow{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{E}_p = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{6\mathcal{M}_1\mathcal{M}_1}{r^4}\overrightarrow{u_r}$$

L'interaction est attractive.

X.3 Dans ce cas on trouve une énergie opposée à la précédente et une interaction répulsive (essayer avec des aimants).

X.4 En prenant le magnéton de Bohr comme ordre de grandeur pour les deux moments :

$$\mathrm{U} \approx 8.10^{-24}\ \mathrm{J}$$

En identifiant à $k_\mathrm{B}\mathrm{T}$, on trouve une température de $0,6$ K, c'est très faible, ce n'est pas l'interaction dipôle dipôle qui est réponsable du magnétisme de la matière.

XI. Effet Meissmer dans un supraconducteur ♪♪♪

XI.1 Par homogénéité :

$$[\mu_0 \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{j}] = \frac{[\mathrm{B}]}{[\delta^2]}$$

$$[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \mu_0 \overrightarrow{j}] = \frac{[\mathrm{B}]}{[\delta^2]} \text{ or } [\mu_0 \overrightarrow{j}] = [\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \mathrm{B}] = \frac{[\mathrm{B}]}{\mathrm{L}}$$

$$\frac{[\mathrm{B}]}{\mathrm{L}^2} = \frac{[\mathrm{B}]}{[\delta^2]}$$

On en déduit que δ est homogène à une longueur.

XI.2 Le divergent d'un rotationnel est toujours nul donc :

$$\mathrm{div}\,(\mu_0 \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{j}) = \frac{\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\delta^2}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = 0}$$

Le champ magnétique est à flux conservatif.

XI.3 L'équation de Maxwell-Ampère est toujours valable dans le supraconducteur :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{B}} = \mu_0 \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,(\overrightarrow{\text{B}})) - \Delta\overrightarrow{\text{B}} = \mu_0 \times -\frac{\overrightarrow{\text{B}}}{\mu_0\delta^2}$$

Or le champ $\overrightarrow{\text{B}}$ est à flux conservatif : $\Delta\overrightarrow{\text{B}} - \dfrac{\overrightarrow{\text{B}}}{\delta^2} = 0$

XI.4 La cause de $\overrightarrow{j}$ (cause de $\overrightarrow{\text{B}}$) est l'ensemble le champ $\overrightarrow{\text{B}}_0$ et la plaque. Les plans (M, x, y) sont des plans de symétrie de l'ensemble. $\overrightarrow{\text{B}}$ est donc selon Oz. Les plans (M, x, z) sont des plans d'antisymétrie de l'ensemble, donc $\overrightarrow{j}$ est selon Oy.

L'ensemble plaque+champ $\overrightarrow{\text{B}}_0$ est invariant par translation selon y et z. Le champ ne dépend que de x.

$$\boxed{\overrightarrow{\text{B}} = \text{B}(x)\overrightarrow{u_z}}$$

XI.5 L'équation différentielle est :

$$\frac{\text{d}^2\text{B}(x)}{\text{d}x^2} - \frac{\text{B}(x)}{\delta^2} = 0$$

La solution est alors :

$$\text{B}(x) = \text{A}_1\,\text{ch}\left(\frac{x}{\delta}\right) + \text{A}_2\,\text{sh}\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Le champ est continu en $-e$ et e :

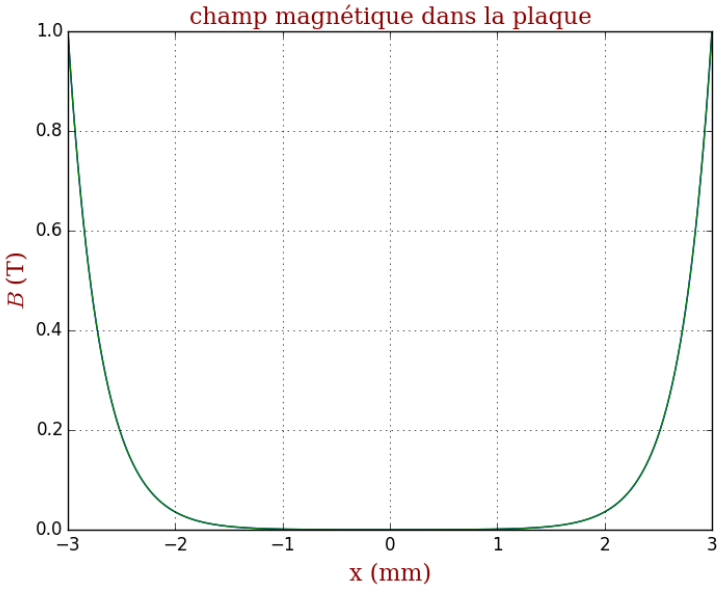
$$\text{B}(-e) = \text{B}_0 = \text{B}(e)$$

On en déduit :

$$\text{A}_1 = \frac{\text{B}_0}{\text{ch}\left(\frac{e}{\delta}\right)} \text{ et } \text{A}_2 = 0$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{B}} = \frac{\text{B}_0}{\text{ch}\left(\frac{e}{\delta}\right)}\,\text{ch}\left(\frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_z}}$$

δ représente la distance de variation caractérisque du champ magnétique dans la plaque.



XI.6 Pour déterminer $\overrightarrow{j}$, le plus simple est d'utiliser l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{B}} = \mu_0 \overrightarrow{j} \text{ soit } -\frac{\partial \text{B}}{\partial x} = \mu_0 j_y \text{ je vous laisse finir.}$$

On voit que le champ est plutôt à l'extérieur de la plaque : le supraconducteur a tendance à expulser les lignes de champ. ce dernier est principalement confiné dans une épaisseur de quelques δ.

❦