TD n°5 : Électromagnétisme dépendant du temps, conducteur

I. Question de cours

1. Énoncer le théorème d'Ostrogradski. Énoncer le théorème de Stockes.
2. $\text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f))$?
3. $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f))$?
4. $\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{A}}))$?
5. Écrire les quatres équations de Maxwell (avec les opérateurs et dans une base cartésienne).
6. Écrire les équations intégrales associées.
7. Écrire la conservation de la charge.
8. Donner l'expression de l'énergie électromagnétique volumique.
9. Donner l'expression du vecteur de Poynting. Signification ? Unité ?
10. Écrire la conservation de l'énergie : loi locale et intégrale.
11. Donner le cadre de l'ARQS, définir l'ARQS magnétique, donner les équations de Maxwell dans ce cas. Dans quels cas concrets y-a-t-il ARQS magnétique ?
12. Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Donner un exemple montrant qu'il est nécessaire de l'introduire.

II. Right or wrong

1. Le vecteur de Poynting s'écrit $\varepsilon_0 c^2 \overrightarrow{\text{B}} \wedge \overrightarrow{\text{E}}$.
2. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit : $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{B}} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{\text{E}}}{\partial t}$.
3. Le courant de déplacement correspond à un mouvement de charge.
4. Les électrons se déplacent dans les fils électriques à la vitesse de la lumière.
5. Le vecteur de Poynting décrit le déplacement de l'énergie électromagnétique.

III. Muscler le calcul

Calculer le divergent et le rotationnel du champ électrique suivant :

$$\overrightarrow{\text{E}}(x,y,t) = \text{E}_m \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_z}$$

Calculer le rotationnel et le divergent du champ magnétique suivant :

$$\overrightarrow{\text{B}}(x,z,t) = \text{B}_0 \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x} + \text{B}_1 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_z}$$

IV. Les aimants les plus puissants du monde ♪♪

1. Les champs magnétiques les plus élevés atteints en continu sont de l'ordre de 50 T, leur fabrication équivaut à concentrer dans un volume gros comme un poing l'énergie d'un bâton de dynamite.
   a) Évaluer numériquement cette énergie.
   b) En déduire l'ordre de grandeur du nombre de moles de la molécule composant la dynamite (nitroglycérine).
   c) Faire l'expérience avec M. Guitton.
2. Pour amplifier un champ magnétique transitoirement, il suffit de faire imploser l'aimant. Justifier En modélisant l'aimant par un solénoïde infini.

V. Effet Branly ♪♪

En 1890, Édouard Branly étudie la conductivité électrique de différentes substances à l'institut catholique de Paris. Un jour, il place de la poudre métallique (sans doute de la limaille de fer) dans un tube de verre et trouve une résistance très élevée.

Il observe par accident qu'en produisant une étincelle à plusieurs mètres du tubes, la résistance chute de plusieurs ordres de grandeur.

1. Pourquoi la résistance de la limaille est-elle élevée ?
2. Proposer une explication au phénomène. Peut-on revenir à l'état initial ?
3. Proposer une application.

VI. Particules colloïdales (équations de Maxwell en régime stationnaire) ♪♪♪

Une solution colloïdale est une suspension dans l'eau de particules de dimension de l'ordre de 10^{-8} m à 10^{-6} m (échelle mésoscopique).

En dehors des particules colloïdales, la solution contient des ions de charge $\pm e$ considérés comme ponctuels.

Soit une particule colloïdale sphérique, de centre O et de rayon R, portant une charge Q. On suppose que le potentiel électrique autour de cette particule ne dépend que de $r = \mathrm{OM}$. Dans ce cas :

$$\Delta \mathrm{V} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(r\mathrm{V}(r))}{\mathrm{d}r^2}$$

La densité numérique des anions N_- et des cations N_+ s'écrivent :

$$\mathrm{N}_-(r) = \mathrm{N}_0 \exp\left(\frac{e\mathrm{V}(r)}{k_\mathrm{B}\mathrm{T}}\right) \text{ et } \mathrm{N}_+(r) = \mathrm{N}_0 \exp\left(-\frac{e\mathrm{V}(r)}{k_\mathrm{B}\mathrm{T}}\right)$$

où N_0 est une constante, V(M) le potentiel électrostatique, k_B la constante de Boltzmann et T la température absolue.

1. Justifier les formules précédentes.
2. Exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction de $\mathrm{V}(r)$. Dans toute la suite on supposera que $|e\mathrm{V}(r)| \ll k_\mathrm{B}\mathrm{T}$; simplifier alors l'expression précédente.
3. Trouver l'équation différentielle satisfaite par $\mathrm{V}(r)$. Montrer que :

$$\mathrm{V}(r) = \frac{\mathrm{A}}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$$

   Où A est une constante indéterminée et λ une grandeur à exprimer en fonction des données. Donner la signification physique de λ.
4. Quelle est la charge $\mathrm{Q}(r)$ contenue dans la sphère de rayon r. Déterminer sa limite pour r infini. Commenter.
5. La stabilité de la solution colloïdale est assurée par la répulsion électrostatique entre particules. Montrer que l'ajout de sel dans la solution peut provoquer la floculation des particules, ie leur agrégation suivie de leur précipitation au fond du récipient.

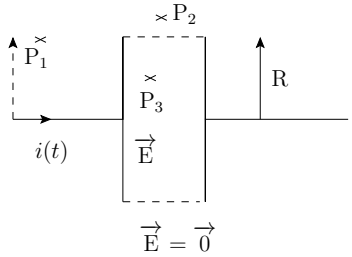
VII. Sphère radioactive ♪

Une sphère radioactive, de rayon R, émet des particules chargées de façon isotrope dans tout l'espace. On note $\mathrm{Q}(r,t)$ la charge contenue à l'instant t dans une sphère de rayon r ($r > \mathrm{R}$).

1. Calculer le champ électrique et le champ magnétique à la distance r du centre de la sphère radioactive. À l'aide d'un bilan de charge, calculer le vecteur densité de courant volumique à la distance r.
2. Les résultats précédents sont-ils en accord avec l'équation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0 \overrightarrow{j}$? Commenter.

VIII. Champ magnétique, condensateur ♪

Un condensateur circulaire de rayon R, est chargé par un courant $i(t)$. Les effets de bord sont négligés. Le fil est considéré très grand devant l'épaisseur e du condensateur.



Calculer le champ magnétique durant la charge en P_1 ($r < R$) en dehors du condensateur, P_2 au dessus du condensateur et P_3 dans le condensateur.

IX. Courant de déplacement ♪

Un fil circulaire de section $S = 40\ mm^2$ est parcouru par un courant de 30 A. La résistivité du fil est de 2.10^{-8} Ω.m (La résistivité est l'inverse de la conductivité).

1. Que vaut le champ électrique dans le câble ?
2. Si le taux de variation du courant est de 6000 $A.s^{-1}$, que vaut le courant de déplacement ?
3. Que vaut le champ magnétique à 5 cm du centre du câble ?

X. Champ électromagnétique ♪

On considère le champ électrique suivant, régnant dans une partie de l'espace vide de charge et de courant :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t + kz)\overrightarrow{u_x} + E_0 \sin(\omega t + kz)\overrightarrow{u_y} \qquad \text{avec } k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\omega$$

1. Vérifier la compatibilité de cette expression avec les équations de Maxwell.
2. Déterminer le champ magnétique associé.
3. Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique. En déduire l'énergie qui entre dans un cylindre de rayon a d'axe Oz, dont les bases se trouvent en z_1 et z_2.

XI. Champ magnétique produit par un condensateur ♪♪

Soit un condensateur formé de deux disques de rayon a distants de e tel que $a \gg e$. Le condensateur est soumis à une tension lentement variable : $u(t) = U_m \cos(\omega t)$, alimenté par un courant $i(t)$.

1. Déterminer l'expression du champ électrique dans tout l'espace.
2. Déterminer le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du condensateur.
3. Déterminer le vecteur de Poynting dans le condensateur.
4. Effectuer un bilan de puissance sur le volume du condensateur. En déduire l'expression de l'énergie électromagnétique stockée dans le condensateur. La comparer à l'énergie électrique stockée. Que vaut le rapport de l'énergie magnétique volumique sur l'énergie électrique volumique ? Conclusion ?
5. Peut-on utiliser indifféremment l'équation de Maxwell-Ampère ou l'équation de Maxwell-Faraday pour déterminer le champ magnétique ? Pourquoi ?

XII. Bilan énergétique ♪

On considère un milieu métallique semi-infini de conductivité γ occupant l'espace $z > 0$. Le champ magnétique à l'intérieur du conducteur est :

$$\overrightarrow{B} = B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \overrightarrow{u_y}$$

On admet que le courant de déplacement est négligeable.

1. Quelles sont les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{j}$?
2. Quelle est la puissance moyenne $<\mathcal{P}>$ transférée au conducteur à travers une surface S orthogonale à l'axe z situé en $z = 0$?
3. Que devient cette puissance ? Faites une vérification à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{j}$ au sein du conducteur.

XIII. Impulsion du champ électromagnétique ♪

Le champ électrique d'une onde plane sinusoïdale qui se propage dans le vide dans la direction de l'axe (Oz) a la forme suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(\overrightarrow{r}, t) = \mathrm{E}_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}.$$

On admettra la relation $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$

1. Exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ oscillant associé, dans cette onde, au champ électrique précédent. Montrer que la compatibilité du champ de l'onde avec les équations de Maxwell dans le vide impose une relation entre k et ω (on prendra $k > 0$, pour une propagation à z croissant).
2. Quelle est la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie de cette onde ?
3. La grandeur $\overrightarrow{g} = \varepsilon_0 \overrightarrow{\mathrm{E}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$ est appelée impulsion volumique du champ (ou quantité de mouvement par unité de volume). L'unité de cette grandeur est-elle en accord avec cette définition ?
4. Dans un modèle corpusculaire, on associe à cette onde un faisceau de photons se déplaçant à la vitesse c de l'onde. On rappelle qu'un photon est une particule (relativiste) de masse nulle, d'énergie $\mathrm{E} = hv$ (où $v = \dfrac{2\pi}{\omega}$ désigne la fréquence de l'onde) et d'impulsion, ou quantité de mouvement, $p = \dfrac{\mathrm{E}}{c} = \dfrac{hv}{c}$.
   Quelle densité particulaire n de photons peut être associée à cette onde ? En déduire l'expression de l'impulsion volumique associée à l'onde et vérifier qu'elle s'identifie bien à la moyenne temporelle de la grandeur $\overrightarrow{g}$ définie à la question 3.

XIV. Plaque de cuivre plongée dans un champ magnétique variable (Centrale) ♪♪

Soit un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ et deux plans (P) et (P′) parallèles au plan $(x\mathrm{O}y)$, et de cotes respectives suivant Oz égales à $+\dfrac{a}{2}$ et $-\dfrac{a}{2}$. Ces plans délimitent une plaque de cuivre homogène, d'épaisseur a, de perméabilité μ_o, de permittivité ε_o et de conductivité γ.

1. Une source de champ magnétique uniforme et constant est placée au-dessus de (P). La présence de la plaque modifie-t-elle le champ magnétique ?
2. La plaque est maintenant plongée dans un champ uniforme mais alternatif $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\overrightarrow{u_x}$ avec $\mathrm{B} = \mathrm{B}_0 \cos(\omega t)$ (B_0 et ω constants).
   Nous supposerons la fréquence suffisamment basse pour que le champ magnétique reste approximativement uniforme dans tout le conducteur.
   a) Montrer que l'existence du champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ variable dans le temps implique l'apparition d'un champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et, dans la plaque, d'un courant induit de densité $\overrightarrow{j}$.
   b) Par des arguments de symétrie, qu'on s'attachera, ici encore, à rendre aussi précis que possible, montrer que $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est parallèle à $\overrightarrow{u_y}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{E}}(-z) = -\overrightarrow{\mathrm{E}}(z)$.
   c) Par le calcul de la circulation de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ sur un contour convenablement choisi, déterminer $\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M})$. Donner la densité de courant $\overrightarrow{j}(\mathrm{M})$ correspondante et tracer le graphique de la variation de l'amplitude de cette densité en fonction de z.
3. On considère une portion de la plaque limitée par un cylindre droit de génératrices parallèles à Oz, et dont les bases, situées dans les deux plans $z = \pm\dfrac{a}{2}$ ont pour aire S. Soit $\tau = \mathrm{S}.a$ le volume de cette portion de

plaque. Calculer la puissance $p(\tau)$ dissipée en moyenne sur une période par effet Joule dans le volume τ, et la puissance volumique moyenne $\widetilde{p} = \dfrac{p(\tau)}{\tau}$. Exprimer $\widetilde{p}$ en fonction de γ, ω et B_0.

Application numérique : $a = 5$ cm ; $\omega = 100\pi$ rad.s^{-1} ; $\mathrm{B}_0 = 1$T.

4. Un cube est fait de plaques de cuivre isolées très grandes selon x et y et empilées selon la direction Oz, peut être soumis à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$. Dans quel cas la puissance volumique moyenne dissipée par les courants dans la plaque, appelés courants de Foucault, est-elle la plus grande ?

XV. Décharge entre deux sphères concentriques ♪

On considère deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2, $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2$. Entre les deux sphères se trouve un conducteur ohmique de conductivité γ.

Initialement une charge Q est uniformément répartie sur la surface de la sphère intérieure. À $t = 0$, une décharge se produit entre les deux sphères. La densité volumique de courant $j(r,t)\overrightarrow{u_r}$ amène alors la charge Q sur la sphère extérieure.

1. Justifier l'expression de $\overrightarrow{j}$. Donner un ordre de grandeur de γ pour un conducteur.
2. Donner l'expression de la loi d'Ohm locale et son domaine de validité.
3. Donner l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ avant et après la décharge.
4. Justifier sans calcul la nullité de $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ pendant la décharge.
5. Calculer le champ électrique pendant la décharge en fonction notamment d'un temps τ que l'on définira et dot on donnera le sens physique.
6. Calculer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$.
7. En déduire la variation de la densité volumique d'énergie électromagnétique lors de la décharge entre 0 et $t \gg \tau$.

XVI. Mise en rotation d'une sphère chargée ♪♪

Une sphère de centre O, de rayon R et de masse m, porte une charge Q (la charge Q et la masse m sont réparties uniformément en volume). La sphère peut tourner librement autour d'un axe (Oz) et on appelle J le moment d'inertie de cette sphère par rapport à (Oz) : $\mathrm{J} = \dfrac{2}{5} m\mathrm{R}^2$. On rappelle que pour une rotation autour d'un axe fixe :

$$\mathrm{J}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\omega}}{\mathrm{d}t} = \Sigma\overrightarrow{\mathrm{M}}$$

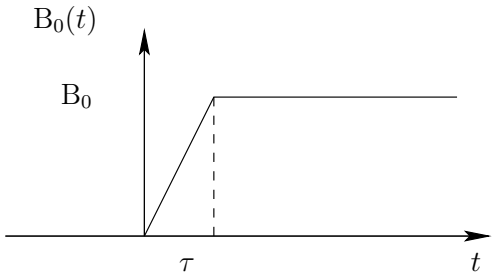
Où $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ est le moment d'une force s'exerçant sur le solide calculé en un point O de l'axe.

La sphère est placée dans une bobine, d'axe (Oz), de rayon a, constituée par un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur (on utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine).

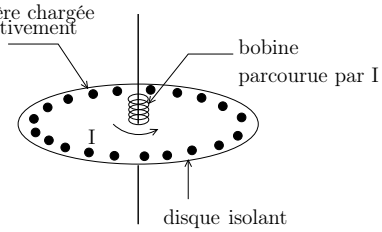
1. A l'instant $t = 0$, le courant circulant dans le solénoïde passe très rapidement de 0 à la valeur I_0. Pourquoi la sphère se met-elle à tourner ?
2. Exprimer la vitesse de rotation finale de la sphère en fonction de sa charge, de sa masse, et du champ magnétique $\mathrm{B}_0 = \mu_0\, n\, \mathrm{I}_0$ créé par le solénoïde.
3. Evaluer numériquement cette vitesse de rotation en proposant des valeurs raisonnables pour réaliser cette expérience. Commenter.
4. Quelle est la relation liant le moment magnétique de la sphère en rotation au champ auquel elle est soumise ?
5. Lorsque la sphère se met en rotation, elle crée un champ magnétique variable négligé jusqu'ici. Evaluer ce champ magnétique au centre O de la sphère. A quelle condition est-il effectivement négligeable devant celui du solénoïde ?

XVII. Moment cinétique du champ électromagnétique (écrit centrale) ♪♪♪

Une sphère creuse S, isolante, de rayon a, porte la charge Q uniformément répartie sur sa surface. Elle est initialement immobile et peut tourner, sans frottement, autour d'un diamètre vertical Oz, son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est J. On applique le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0(t)\overrightarrow{u_z}$ représenté sur la figure ci-contre, uniforme dans le volume de la boule.



1. Déterminer le champ électrique induit par les variations de B_0.
2. En déduire le moment par rapport à Oz des forces subies par S à l'instant t, en fonction de Q, a, B_0 et t.
3. Quelle est l'expression de la vitesse angulaire finale ω_f de la sphère ?
4. On admet que l'on peut associer au champ électromagnétique une densité volumique de quantité de mouvement $\overrightarrow{g}$ telle que $\overrightarrow{g} = \varepsilon_0 \overrightarrow{\mathrm{E}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$.
   a) Vérifier l'homogénéité de cette expression.
   b) Exprimer le champ électrique créé par la boule dans tout l'espace.
   c) Quand la sphère est en rotation, on admet que le champ magnétique à l'intérieur de la sphère est bien $\overrightarrow{\mathrm{B}_0} = \mathrm{B}_0\overrightarrow{e_z}$ mais qu'à l'extérieur de la sphère il est analogue au champ créé par un dipôle magnétique de moment



$$\overrightarrow{\mathrm{M}} = \frac{2\pi a^3 \mathrm{B}_0}{\mu_0}\overrightarrow{u_z}.$$

   En déduire le moment cinétique par rapport à Oz localisé dans le champ électromagnétique dans l'état final. Conclure.
5. On considère le dispositif ci-dessus. Le plateau est initialement immobile. Se met-il à tourner quand on supprime le courant I ? Si oui, dans quel sens ?

XVIII. Couplage des champs ♪♪♪

En régime variable, les champs électrique et magnétique sont couplés. On se propose ici de déterminer une configuration de champ électromagnétique dans le vide par deux méthodes complémentaires : l'une faisant intervenir un découplage des équations, l'autre basée sur une décomposition de Taylor conjointe des deux champs. Dans un système de coordonnées cylindriques, on désire déterminer une solution des équations de Maxwell pour laquelle le champ électrique est axial et fonction des seules variables r et t ; tandis que le champ magnétique est orthoradial et fonction des mêmes variables : $\mathrm{E} = \mathrm{E}(r,t)\overrightarrow{u_z}$, $\mathrm{B} = \mathrm{B}(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$ (voir figure).

1. Exprimer, à l'aide du formulaire, le rotationnel du champ électrique puis celui du champ magnétique. Montrer à partir des équations de Maxwell que la fonction $\mathrm{E}(r,t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial t^2} = 0$$

2. On cherche des solutions de la forme :

$$\mathrm{E}(r,t) = \mathrm{E}_0 e(r)\exp(-t/\tau)$$

   où τ est une constante de temps réelle positive et $e(0) = 1$. On définit une variable complexe $z = \dfrac{ir}{\tau c}$, montrer que moyennant le changement de variable de r en z, on aboutit à l'équation différentielle :

$$e''(z) + \frac{1}{z}e'(z) + e(z) = 0$$

Une solution de cette équation est donnée par la fonction de Bessel : $\mathrm{J}_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$. Déterminer le développement limité au 4e ordre en r de $\mathrm{E}(r,t)$.

3. On souhaite retrouver ce résultat en examinant conjointement les variations de $\mathrm{E}(r,t)$ et $\mathrm{B}(r,t)$. Partant d'une première expression du champ électrique : $\mathrm{E}_0(r,t) = \mathrm{E}_0 \exp(-t/\tau)$, calculer le courant de déplacement puis en déduire une expression du champ magnétique $\mathrm{B}_1(r,t)$ par application du théorème d'Ampère.
4. L'existence d'un champ magnétique rejaillit sur l'expression du champ électrique ; on peut déterminer une modification du champ initial en ajoutant un terme $\mathrm{E}_2(r,t)$, déduit de $\mathrm{B}_1(r,t)$. À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer $\mathrm{E}_2(r,t)$. On pourra utiliser le théorème de Stokes sur un contour bien choisi et on retiendra la solution de valeur nulle sur l'axe Oz.
5. Réitérer le processus pour aboutir à $\mathrm{B}_3(r,t)$ puis $\mathrm{E}_4(r,t)$. Que constate-t-on ?

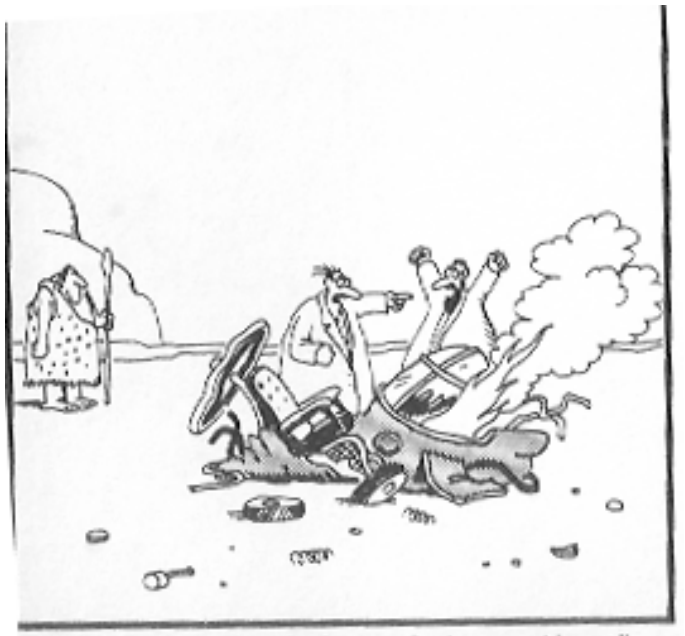
XIX. Distribution de courants non uniforme dans un fil. ♪♪♪

Un conducteur ohmique de conductivité γ, cylindrique d'axe Oz et de rayon R est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω de suffisamment basse fréquence pour qu'on puisse se placer dans le cadre des régimes quasi-permanents.

On suppose que la densité de courant s'écrit $j(r)\exp(j\omega t)\overrightarrow{u_z}$

1. Justifier cette expression puis donner celle du champ électrique.
2. Trouver le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sans utiliser de lois locales.
3. Montrer que $\overrightarrow{j}$ est solution d'une équation différentielle du second ordre.
4. On cherchera à résoudre cette équation sous la forme : $\sum_{k=0}^{\infty} a_n r^n$. Commenter les résultats à la fréquence du secteur.

XX. Pour se détendre.



Tempers flare when Professors Carlson and Lazzeli, working independently, ironically set their time machines to identical coordinates.

It came from the far side, Gary Larson

❦