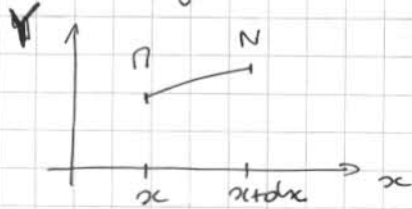


Quelques propriétés des instruments de musique à lame et à corde

X-ENS PC 2014.

I Vibrations d'une corde souple

1) On néglige la raideur de la corde donc $\vec{K} = \vec{0}$ et $\vec{T} = \vec{0}$.
la seule contrainte exercée par un bout de corde sur celui d'à côté est tangente à la corde (suivant $\vec{n}$).



On étudie l'élément de corde de longueur dx dans le référentiel terrestre galiléen (ce sera toujours ce référentiel, inutile de le rappeler).

BdF: $\vec{T}_N$ la tension en N , tangente à la corde
 $\vec{T}_n$ la tension en n .

On néglige le poids.

On utilise les notations de l'énoncé: $\vec{T}_N = \vec{N}(x+dx, t)$
 $\vec{T}_n = -\vec{N}(x, t)$

Le PFD s'écrit $dm \vec{a} = \vec{N}(x+dx, t) - \vec{N}(x, t)$

En projection sur $\vec{e}_x$: $0 = N(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - N(x, t) \cos \alpha(x, t)$

or les angles sont petits donc $\cos \alpha = 1$ ainsi

$N(x+dx, t) = N(x, t) = T_0$ La tension est uniforme

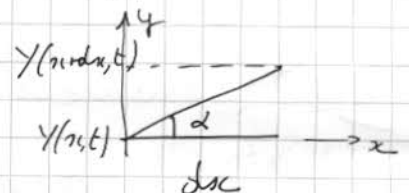
En projection sur $\vec{e}_y$: $\rho S \ddot{y} = T_0 \sin \alpha(x+dx, t) - T_0 \sin \alpha(x, t)$ et constante

or les angles sont petits donc $\sin \alpha = \alpha$.

après DL $\rho S \ddot{y} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$

En outre $\tan \alpha = \alpha = \frac{y(x+dx, t) - y(x, t)}{dx}$

$= \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dx}$ soit $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$

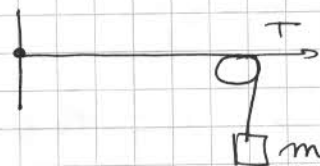


Finalement $\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

On trouve une équation de d'Alembert de célérité $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}}$

On tend la corde par une masse :

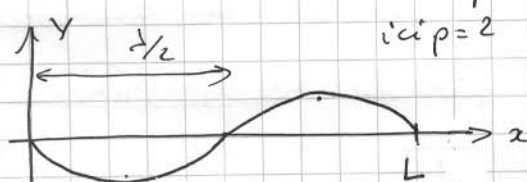
$T = mg$ dans la limite
des petites oscillations



2) Dans le cas quelconque la corde ne bouge presque pas



Quand on excite 1 mode propre



ici $p=2$

$$L = p \frac{\lambda}{2} \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*$$

or $\lambda = cT$ car l'équation

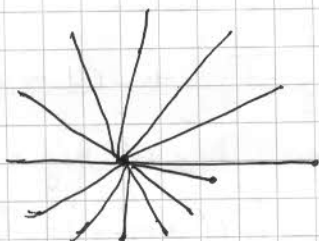
d'onde est une équation de d'Alembert

d'où $T = \frac{2L}{c p}$ et comme $\omega = \frac{2\pi}{T}$

alors $\boxed{\omega_p = \frac{p \pi c}{L}}$ $p \in \mathbb{N}^*$.

3) On a $f_1 = \frac{c}{2L}$ ($p=1$) On peut l'augmenter en diminuant L (un violon d'enfant est plus aigu qu'un alto qui a des cordes plus longues) ou en augmentant c , pour cela, on augmente T la tension de la corde

4)



Pour $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (acier)

$$S = 0,2 \text{ mm}^2 = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$T_0 = 100 \text{ N (masse de 10 kg)}$$

$$f_1 = 440 \text{ Hz pour } L = \frac{1}{2 f_1} \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$$

c'est-à-dire $L = 36 \text{ cm}$.

On prend 13 câbles tendus par une masse de 10 kg, de section $0,2 \text{ mm}^2$ et de masse volumique $5,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, de longueurs $L_0 = 36 \text{ cm}$ et $L_i = L_0 \times 2^{-i/12}$, jusque $L_{12} = \frac{L_0}{2}$, et on les met en étoile parce que je trouve ça joli.

II Equation générale

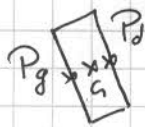
5) $\alpha = \frac{\partial Y}{\partial x}$ comme au 1).

6) Si, sur un morceau de corde $Y = kx$ avec k une constante non nulle, alors le câble n'est pas tendu et $\mathcal{H} = 0$. Or dans ce cas $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq 0$ et $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0$ d'où

$$\boxed{\mathcal{H} = \gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}$$

Y et x sont en m et $\mathcal{H}$ en N.m donc $\boxed{\gamma \text{ est en } \text{N.m}^{-2}}$

7) On applique le TNC à l'élément de lame par rapport à son centre de gravité supposé fixe



BdF: $\vec{N}_d$ exercée en P_d
 $-\vec{N}_g$ exercée en P_g
 $\vec{T}_d$ exercée en P_d
 $-\vec{T}_g$ exercée en P_g
 + les moments $\vec{\mathcal{H}}_d$ en P_d
 $-\vec{\mathcal{H}}_g$ en P_g

Le TNC appliqué au point G supposé fixe donne:

$$\vec{G}P_d \wedge (\vec{N}_d + \vec{T}_d) + \vec{G}P_g \wedge (-\vec{N}_g - \vec{T}_g) + \vec{\mathcal{H}}_d - \vec{\mathcal{H}}_g = \frac{d\vec{T}_g}{dt} = \vec{0}$$

Or $\vec{G}P_d$ et $\vec{G}P_g$ sont colinéaires à $\vec{m}$ comme $\vec{N}_d$ et $\vec{N}_g$

$$\text{d'où } \frac{dx}{2} T(x+dx) \vec{e}_z + \frac{dx}{2} T(x) \vec{e}_z + [T(x+dx) - T(x)] \vec{e}_z = 0$$

$$\text{Et ainsi } dx T(x) + \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0 \quad \text{à l'ordre 1 en } dx$$

$$\text{d'où } \boxed{T(x) = -\frac{\partial T}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}}$$

8) On reprend le Bdf de la question précédente.

Le PFD s'écrit: $\rho S dx \ddot{u}_y = \vec{N}_d - \vec{N}_g + \vec{T}_d - \vec{T}_g$

On projette sur $\vec{u}_y$: $\rho dx \ddot{Y} = N(x+dx, t) \sin \alpha(x+dx, t) - N(x, t) \sin \alpha(x, t) + T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t)$

sur $\vec{u}_x$ $0 = N(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - N(x, t) \cos \alpha(x, t) - T(x+dx, t) \sin \alpha(x+dx, t) + T(x, t) \sin \alpha(x, t)$

Avec α petit, cela devient $N(x+dx, t) - N(x, t) = + \frac{\partial(T\alpha)}{\partial x} dx$

$$\text{Soit } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial T\alpha}{\partial x}$$

La projection sur $\vec{u}_y$ devient: $\rho dx \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial(N\alpha)}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial x} dx$

$$\text{or } \frac{\partial(N\alpha)}{\partial x} = N \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} T \right)$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}}$$

Termes en α^2 négligés
c'est-à-dire qu'on considère
N uniforme et égal à T_0

On trouve bien l'équation proposée avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$

Pour la corde de Helde $\boxed{\gamma=0}$ on retrouve $\boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}$

9) C'est l'équation d'ordre 4 en x , il faut 4 conditions aux limites, portant sur Y et α en $x=0$ et $x=L$, peut-être aussi N ou T

III Instruments à lame vibrante

$N=0$ et pour moi $T_0=0$ d'où $\boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -\frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}}$

A) On évalue l'équation d'onde avec $Y = f(x) e^{i\omega t}$.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = f(x) \times (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 f(x) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = f^{(4)}(x) e^{i\omega t}$$

$$\text{D'où } \boxed{f^{(4)}(x) = +\frac{\omega^2}{A} f(x)}$$

Je vais juste vérifier que la fonction proposée convient

$$f(x) = K B_1 \cos(Kx) - K B_2 \sin(Kx) + K B_3 \cosh(Kx) + K B_4 \sinh(Kx)$$

$$f''(x) = -K^2 B_1 \cos(Kx) - K^2 B_2 \sin(Kx) + K^2 B_3 \cosh(Kx) + K^2 B_4 \sinh(Kx)$$

$$f^{(4)}(x) = -K^4 B_1 \cos(Kx) + K^4 B_2 \sin(Kx) + K^4 B_3 \cosh(Kx) + K^4 B_4 \sinh(Kx)$$

$$f^{(4)}(x) = +K^4 B_1 \sin(Kx) + K^4 B_2 \cos(Kx) + K^4 B_3 \sinh(Kx) + K^4 B_4 \cosh(Kx)$$

On remarque que c'est $K^4 f(x)$

Donc la fonction proposée convient si $K^4 = \frac{\omega^2}{A}$ c'est-à-dire $K = \sqrt[4]{\frac{\omega^2}{A}}$

B) La lame est posée donc les extrémités ne bougent pas ($Y=0$)

En outre, elle est libre ^{de rotation}, donc il n'y a pas de moment exercé sur les extrémités, seulement une contrainte $\vec{T}$ verticale. ($\vec{M}=0$)

$$\left. \begin{array}{l} Y(0,t) = 0 \text{ donc } B_2 + B_4 = 0 \\ M(0,t) = Y \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0 \text{ donc } -B_2 + B_4 = 0 \end{array} \right\} B_2 = B_4 = 0$$

$$Y(L,t) = 0 \text{ donc } B_1 \sin(KL) + B_3 \sinh(KL) = 0$$

$$-B_1 \sin(KL) + B_3 \sinh(KL) = 0$$

Par somme et différence, cela donne: $B_1 \sin KL = 0$

$$B_3 \sinh KL = 0 \text{ d'où } B_3 = 0$$

Il ne reste que $f(x) = B_1 \sin Kx$

avec $KL = \pi$ ou 2π ou $3\pi \dots$

$$K_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$14) \text{ d'où } \omega_n = \sqrt{A K_n^4} = \sqrt{A} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \text{ et } f_n = \sqrt{A} \frac{n^2 \pi}{2L^2}$$

$$f_n(x) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ et } Y_n(x) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-i\sqrt{A} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 t}$$

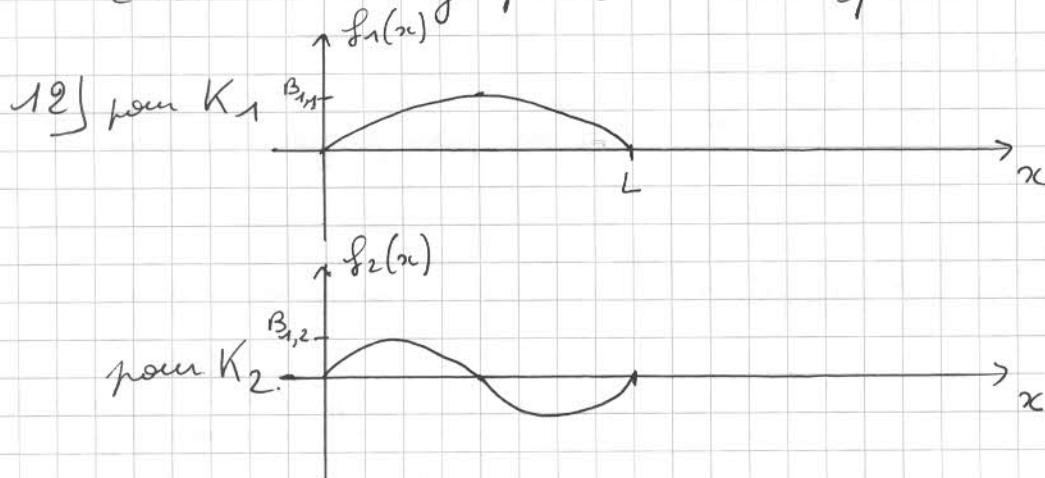
$$\omega_n = \omega_1 \times n^2 \text{ où } \omega_1 = \sqrt{A} \frac{\pi^2}{L^2}$$

Il n'y a que des harmoniques donc on a bien 1 série de Fourier.

15] Pour 1 corde, on a $\omega_n = n \omega_1$, tous les multiples de ω_1 sont possibles; pas pour le xylophone.

Le timbre dépend de la présence du signal à $2\omega_1$, qui est absent pour le xylophone ($\omega_1, 2^2\omega_1 = 4\omega_1, 3\omega_1, \dots$)

Le timbre du xylophone est donc pauvre



16] $\omega_{1,la2} = \frac{\omega_{1,la3}}{2}$ et $\omega_{1,la4} = \omega_{1,la3} \times 2$. (1, pour fondamental)

Or $\omega_{1,note} = \sqrt{A} \frac{\pi^2}{L_{note}^2}$ d'où $\frac{L_{note1}}{L_{note2}} = \frac{\omega_{1,note2}}{\omega_{1,note1}}$

D'où $L_{la2} = \sqrt{2} L_{la3} = 46,4 \text{ cm}$
 et $L_{la4} = L_{la3} / \sqrt{2} = 23,2 \text{ cm}$

17] Pilon des forces sur la lame entière:

$$\begin{cases} \rightarrow \vec{F} \\ \rightarrow \vec{R}_A \\ \rightarrow \vec{R}_B \end{cases}$$

On applique le PFD à la lame:

$$\vec{F} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

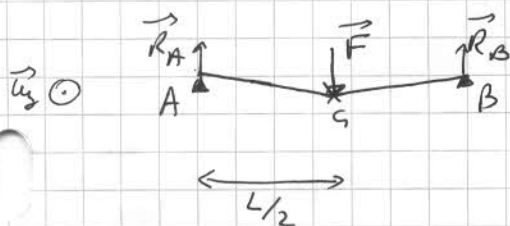
On applique le TNC à la lame

par rapport à A fixe:

$$\vec{0} = \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(\vec{R}_B)$$

soit: $0 = 0 + -L/2 F + L R_B$ (par les bras de levier)

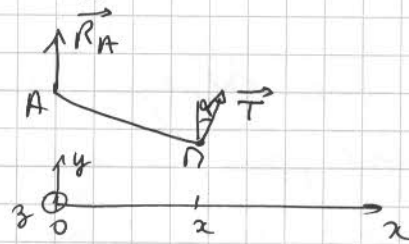
d'où $R_B = \frac{F}{2}$ et $R_A = \frac{F}{2}$ d'après le PFD



Par symétrie, c'était "évident" mais on ne voit jamais.
 (Rmq, c'est écrit "exprimer", pas "établir" donc on aurait peut-être pu...)

18) On applique le PFD et le TMC par rapport à A fixe à l'élément $[AN]$ où $x_n = x \in [0, \frac{L}{2}]$

BdF: $\begin{cases} \vec{R}_A \text{ en A} \\ \vec{T}(x) \text{ en N} \\ \vec{N} = \vec{0} \text{ en N.} \end{cases}$



+ le moment $\vec{M}(x)$

Par PFD: $\vec{0} = \vec{R}_A + \vec{T}$ d'où par projection sur $\vec{u}_y$ avec $\alpha \ll \text{rad}$

$R_A = -T$

TMC $\vec{0} = \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{M}_A(\vec{T}) + \vec{M}(x)$ par projection sur $\vec{u}_y$

$xT + M = 0$ d'où

$$\begin{aligned} T &= -R_A = -\frac{F}{2} \\ M(x) &= \frac{F}{2} x \end{aligned} \quad \text{pour } x \in [0, \frac{L}{2}]$$

Maintenant pour $x = x_n \in [\frac{L}{2}, L]$, on étudie l'élément NB

BdF: $\begin{cases} \vec{R}_B \text{ en B} \\ -\vec{T}(x) \text{ en N} \\ -\vec{N} = \vec{0} \text{ en N} \end{cases}$

le PFD donne $\vec{0} = \vec{R}_B - \vec{T}$

$T = R_B = \frac{F}{2}$

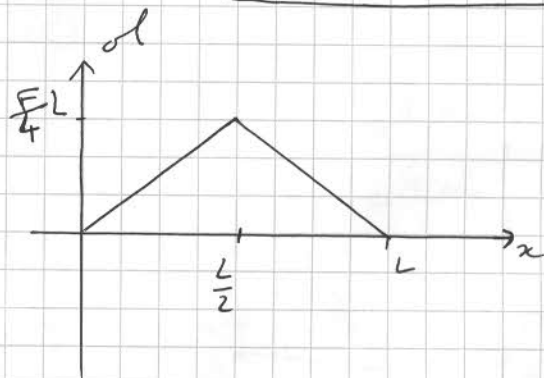
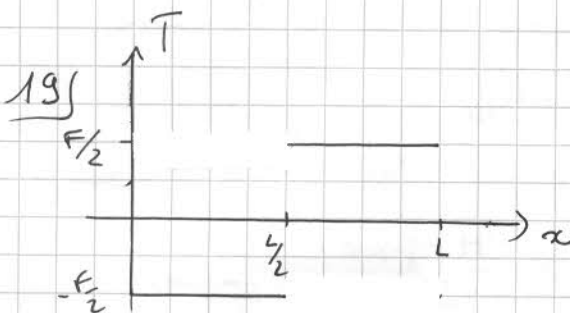
et le TMC en B fixe $(L-x)T - M = 0$ projeté sur $\vec{u}_y$

+ le moment $-\vec{M}(x)$

d'où

$$\begin{aligned} T &= +\frac{F}{2} \\ M(x) &= \frac{F}{2} (L-x) \end{aligned} \quad \text{pour } x \in [\frac{L}{2}, L]$$

(- car c'est la force exercée de gauche à droite le moment)



On vérifie $T(x) = -\frac{\partial M}{\partial x}$ obtenu sur 7). et cela vérifie aussi $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ (eq° d'onde)

20) $y(0) = y(L) = 0$ et $y(\frac{L}{2}^-) = y(\frac{L}{2}^+)$

Par symétrie, on a aussi $\alpha(\frac{L}{2}^-) = \alpha(\frac{L}{2}^+) = 0$ (le milieu est le point le plus bas)
(et α est continuellement dérivable: c'est $\frac{y'}{x}$)

Or $\mathcal{K} = \gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ d'où $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{\gamma \delta} x^2 + \delta$ pour $x < \frac{L}{2}$

$$Y(x) = \frac{F}{12\gamma} x^3 + \delta x + \beta$$

or $Y(0) = 0$ donc $\boxed{\beta = 0}$

Pour $x > \frac{L}{2}$ $\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{F}{4\gamma} (L-x)^2 + \delta'$

$$Y = +\frac{F}{12\gamma} (L-x)^3 + \delta' x + \beta'$$

Or $Y(L) = 0$ donc $\boxed{\delta' L + \beta' = 0}$

En outre, il y a continuité en $\frac{L}{2}$ donc $\frac{F}{12\gamma} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \delta \frac{L}{2} = \frac{F}{12\gamma} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \delta' \frac{L}{2} + \beta'$

d'où $\boxed{\delta = -\delta'}$ (car $\delta \frac{L}{2} = \delta' \frac{L}{2} + \beta' - \underbrace{\beta' - \delta' L}_0 = -\delta' \frac{L}{2}$)

Il y a continuité de α aussi en $\frac{L}{2}$

$$\frac{1}{\delta} \frac{F}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \delta = \frac{F}{4\gamma} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \delta'$$
 d'où $\boxed{\delta = \delta'}$

Ainsi $\boxed{\delta = \delta' = 0}$ et $\boxed{\beta = \beta' = 0}$

$Y(x) = \frac{F}{12\gamma} x^3$	pour $x < \frac{L}{2}$
$Y(x) = \frac{F}{12\gamma} (L-x)^3$	pour $\frac{L}{2} < x < L$

21) $\boxed{Y_n = \left| \frac{F}{12\gamma} \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right| = \frac{FL^3}{96\gamma}}$

Rmq : il y a juste un Rb de signe: Y est censé être négatif...

22) ~~En fait on fait comme si il n'y avait que la partie à gauche de $\frac{L}{2}$ qui vibrait~~

Dans le modèle, il y a la masse m_1 qui bouge avec l'amplitude Y_n alors que dans le cas réel, m bouge en moyenne moins que sur Y_n (les points bougent entre 0 et Y_n). Pour avoir la même énergie, il faut donc prendre $m_1 < m$. (Tout m ne bouge pas sur Y_n mais sur m_1)

23) Si on applique F , $Y = Y_n = \frac{FL^3}{968}$

On fait le parallèle avec un ressort pour lequel $F = -k_1 Y_n$ alors $k_1 = \frac{968}{L^3}$

et $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{968}{m_1 L^3}}$

24) On fait le parallèle avec $E_p = \frac{1}{2} k_1 Y_n^2$

d'où $U = \frac{1}{2} \frac{968}{L^3} Y_n^2 = \frac{1}{2} k_1 Y_n^2$

25) $I_0 = 60 \text{ dB}$ à $d = 5 \text{ m}$, cela correspond à $I = I_0 10^{\frac{I_{dB}}{10}}$ où $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$
 26) donc à une puissance $P = I \times 4\pi d^2$

Ainsi $P = 3 \cdot 10^{-4} \text{ W}$.

Pendant $\Delta t = 1 \text{ s}$, cela fait l'énergie $E = U_0 = P \Delta t = 3 \cdot 10^{-4} \text{ J}$

Ainsi $U_0 = \frac{1}{2} k_1 Y_n^2 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ (Celle énergie potentielle est dissipée en 1 s)

Or $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ d'où $k_1 = m_1 \omega^2 = \frac{m}{2} (2\pi f)^2 = 1 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$

Ainsi $Y_n = \sqrt{\frac{2U_0}{k_1}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

Cela fait une amplitude de $30 \mu\text{m}$. J'ai du mal à le croire tellement c'est petit.

$Y_n = \sqrt{\frac{U_0}{m \pi^2 \nu_1^2}}$

27) Le son dure $\Delta t = 1 \text{ s}$, d'après les transformées de Fourier, cela correspond à une largeur spectrale de $\frac{1}{\Delta t} = 1 \text{ Hz}$.

$Q = \frac{\nu_0}{\Delta \nu} = 440$

C'est un très bon facteur de qualité, inatteignable en électricité avec des dipôles RLC (mais on peut faire mieux avec une lame piézoélectrique).

28) On est en régime quasi-statique

Au pire moment, la lame est  , c'est

comme si $y_0 \uparrow \frac{1}{2} m$. On fait quelque chose pour maintenir

l'ensemble sur les supports, c'est le poids. Il faut que $\vec{P}$ compense

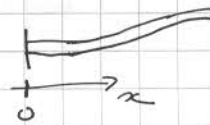
augmenter $\vec{T}$ c'est-à-dire $mg > k_1 y_0$

$$\text{or } k_1 y_0 = 30 \text{ N} \quad \text{et} \quad mg = 2,6 \text{ N} < k_1 y_0$$

La lame ~~se~~^{va} décoller au cours de son mouvement.

29) En $x=0$, la lame est fixée horizontalement.

$$y=0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$



À l'extrémité, elle est libre, ce qui signifie qu'il n'y a aucun moment

et aucune force ne s'applique sur elle: $M=0$ et $T=0$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \cancel{\delta} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \cancel{\delta} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

30) Si $KL \gg 1$ $\chi(KL) \rightarrow \infty$ d'où $\cos KL \rightarrow 0$

Il faut donc que $KL = (2p+1) \frac{\pi}{2}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \gg 1$

Les autres KL ($KL < 10^2$) ne peuvent être obtenus que par lecture graphique ou résolution numérique.

31) On a une série de Fourier si les ω_n s'écrivent $n\omega_1$ $n \in \mathbb{N}$

Or on a vu au B que K est en $\sqrt{\omega}$.

$$\text{D'où} \quad \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{K_n^2}{K_1^2} \quad \text{Ainsi} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = 6,25 ; \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = 17,56 \dots$$

Les pulsations ne sont pas les harmoniques du fondamental.

donc on ne peut pas faire des séries de Fourier.

IV Un piano joue plus ou moins juste

$$32) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) e^{i\omega t} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x) e^{i\omega t} ; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f^{(4)}(x) e^{i\omega t}$$

Ainsi, en reportant dans l'équation d'onde

$$-\omega^2 f(x) - c^2 f''(x) + A f^{(4)}(x) = 0$$

ou encore $\boxed{D f^{(4)}(x) - f''(x) - k^2 f(x) = 0} \quad (E_0)$

$$33) (F_1 \sin(K_I x) + F_2 \cos(K_I x))'' = -F_1 K_I^2 \sin(K_I x) - F_2 K_I^2 \cos(K_I x) \\ = -K_I^2 (F_1 \sin(K_I x) + F_2 \cos(K_I x))$$

$$[F_1 \sin(K_I x) + F_2 \cos(K_I x)]^{(4)} = +K_I^4 (F_1 \sin(K_I x) + F_2 \cos(K_I x))$$

D'où, en reportant dans (E₀): $D K_I^4 + K_I^2 - k^2 = 0$

On pose $X = K_I^2$ $D X^2 + X - k^2 = 0$

$\Delta = 1^2 + 4k^2 D > 0$ $X = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2D}$ il faut prendre + car $X = K_I^2 > 0$

d'où $\boxed{K_I = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{4Dk^2+1}-1}{2D}}}$ on ne gardera que le +, quitte à changer le signe de F_1

On fait de même avec les cosh et sinh: dans E₀, on obtient

$$D K_R^4 - K_R^2 - k^2 = 0.$$

$X = K_R^2$ $\Delta = 1 + 4k^2 D^2$ $X = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2D}$ avec + aussi sinon $X < 0$

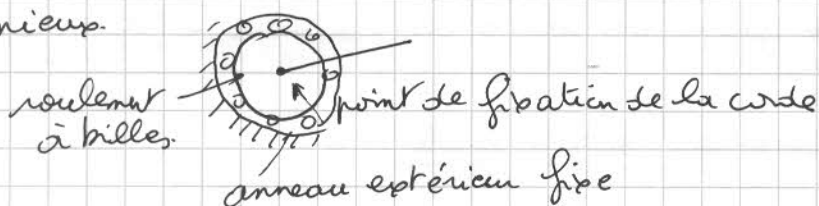
d'où $\boxed{K_R = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{4Dk^2+1}+1}{2D}}}$ On ne gardera aussi que le +, quitte à changer le signe de F_3

34) A chaque extrémité, $Y=0$ et $\pi=0$. C'est-à-dire que la corde est fixée mais peut tourner librement. C'est une liaison pivot parfaite. On réalisera ça en enroulant le câble autour d'un axe

ce point est presque fixe
la corde peut tourner librement.

la corde est enroulée autour; on peut régler la tension

ou mieux.



mais ça risque d'être compliqué de régler la tension.

35) $f(0) = 0$ donc $F_2 + F_4 = 0$

$f''(0) = 0$ donc $-K_I^2 F_2 + K_R^2 F_4 = 0$

C'est-à-dire $F_2 = F_4 = 0$.

de plus $f(L) = 0$ donc $F_1 \sin(K_I L) + F_3 \sinh(K_R L) = 0$

$f''(L) = 0$ donc $-F_1 K_I^2 \sin(K_I L) + F_3 K_R^2 \sinh(K_R L) = 0$

D'où $F_1 \sin K_I L = 0$ et $F_3 \sinh(K_R L) = 0$.

alors $F_3 = 0$ et $F_1 = 0$ (sans intérêt) ou $\sin(K_I L) = 0$

D'où $K_I L = p\pi$ $p \in \mathbb{N}^*$

et $K_I = \frac{p\pi}{L}$

on prendra n au lieu de p .

Finalement $f(x) = F_1 \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$

36) On a posé $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}$ et sur la corde "normale" $k_0 = \frac{2\pi\nu_0}{c}$

On peut donc réécrire $\nu_n = n\nu_0 \sqrt{1+Bn^2}$ sous la forme $k_n = n k_0 \sqrt{1+Bn^2}$

On l'admet et on vérifie que cela convient, avec $K_{I_n} = \sqrt{\frac{4k_n^2 D + 1}{2D}}$

et $K_{I_n} = \frac{n\pi}{L}$ et $k_0 = \frac{\pi}{L}$

On remplace: $\frac{n\pi}{L} = \sqrt{\frac{4k_0^2 n^2 (1+Bn^2) D + 1}{2D}}$

ou $\frac{n^2 \pi^2}{L^2} 2D + 1 = \sqrt{4\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 D n^2 (1+Bn^2) + 1}$

soit $(n^2 d + 1)^2 = 2d n^2 (1+Bn^2) + 1$

c'est-à-dire $n^4 d^2 + 2n^2 d + 1 = 2d n^2 + 2B d n^4 + 1$

Il faut donc que $n^4 d^2 = 2B d n^4$ c'est-à-dire $B = \frac{d}{2}$

Il faut $B = \frac{D\pi^2}{L^2}$ or $D = A/c^2$ et $c = \sqrt{\frac{N}{\rho}}$ et $A = \frac{\tau^2 E}{4\rho}$

d'où $B = \frac{E \tau^2 \pi^2}{4\rho L^2 N} = \frac{E \tau^3 \pi^4}{4L^2 N} = B$

de +, $\nu_0 = \frac{c}{2L}$ d'où $B = \frac{\tau^2 E \pi^2}{4\rho L^2 (2L\nu_0)^2} = \frac{\tau^2 \pi^2 E}{16\rho L^4 \nu_0^2} = B$

37) Pour réduire l'anharmonicité, il faut que B soit le plus petit possible.
On peut diminuer ϵ et r pour rendre une corde sans raideur (corde de Helmholtz) ou augmenter N et L (Attention de garder la même fréquence).

38) $\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1+B}$ donc $\nu_0 = \frac{\nu_1}{\sqrt{1+B}}$
 $\nu_{10} = 10 \nu_0 \sqrt{1+100B} = 10 \nu_1 \frac{\sqrt{1+100B}}{\sqrt{1+B}} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

J'aurais fait comme si on avait plus de chiffres significatifs.

$$\nu_{10} = 2238 \text{ Hz}$$

$$\nu_{10 \text{ parfaite}} = 10 \nu_1 = 2200 \text{ Hz} \quad \text{pour l'harmonique parfaite}$$

$$\nu_{\frac{1}{2} \text{ harmonique parfaite}} = \nu_{10 \text{ parfaite}} \times \sqrt[12]{2} = 2330 \text{ Hz}$$

$\nu_{10 \text{ réel}}$ est plus proche de $\nu_{10 \text{ parfaite}}$ que de $\nu_{\frac{1}{2} \text{ harmonique parfaite}}$ mais

$$\frac{\nu_{10 \text{ réel}} - \nu_{10 \text{ parfaite}}}{\nu_{\frac{1}{2} \text{ harmonique parfaite}} - \nu_{10 \text{ parfaite}}} = 0,3 \quad \nu_{10 \text{ réel}} \text{ est au tiers de l'intervalle } [\nu_{10 \text{ parfaite}}, \nu_{\frac{1}{2} \text{ harmonique parfaite}}].$$

Une oreille sotte peut donc entendre la différence et trouverait
 39) $B = \frac{\pi^2 \epsilon}{16 \rho \nu_0^2} \frac{r^2}{L^4}$ B est donc en $\frac{r^2}{L^4}$ le son non harmonique.

$$\frac{B_{\text{quene}}}{B_{\text{dur}}}} = \left(\frac{r_{\text{quene}}}{r_{\text{dur}}} \right)^2 \left(\frac{L_{\text{dur}}}{L_{\text{quene}}} \right)^4 = 1,7 \cdot 10^{-2}$$

B est 59 fois plus petit. donc les valeurs de ν_n sont plus proches des ν_n parfait.

Par exemple $\nu_{10} = 10 \nu_1 \frac{\sqrt{1+100 \frac{B_{59}}{B_{53}}}}{\sqrt{1+B_{53}}} = 2200,6 \text{ Hz}$

1^{er} chiffre différent de $\nu_{10 \text{ parfait}}$

d'où $\frac{\nu_{10 \text{ réel}} - \nu_{10 \text{ parfait}}}{\nu_{\frac{1}{2} \text{ harmonique parfaite}} - \nu_{10 \text{ parfait}}} = 5\%$

ν_{10} est au $\frac{1}{200}$ de l'intervalle. Ça doit être inaudible.

40] La tension totale est censée être $3 \times 88 \times N = 264 \times N$.

Reste à déterminer N . (en négligeant l'effet de B).

$$c = \sqrt{\frac{N}{\mu}} \quad \text{or} \quad v_0 = \frac{c}{2L} \quad \text{et} \quad \mu = \pi r^2 \rho$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{N = \mu c^2 = \rho (2Lv_0)^2 \pi r^2}$$

$$N = 5,1 \cdot 10^3 \text{ N.} \quad \text{pour un piano droit}$$

$$N = 2,2 \cdot 10^3 \text{ N} \quad \text{pour un piano à queue.}$$

Au total cela fait $N_{\text{tot}} = 5,8 \cdot 10^5 \text{ N}$ ("58 tonnes") appliquées
sur le cadre du piano à queue et $N_{\text{tot}} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ N}$ ("14 tonnes")
sur le piano droit. Il faut un cadre très solide.