

TD N°14 : DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS, DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX

I. questions de cours

1. Donner l'expression des forces volumiques classiques s'exerçant sur un fluide.
2. Donner l'équivalent volumique des forces de pression.
3. Donner l'expression de l'équation d'Euler.
4. Retrouver l'expression des différents théorèmes de Bernoulli (hypothèses?).
5. Donner l'expression de la force visqueuse exercée sur un élément de surface $d\vec{S}$ dans un écoulement parallèle.
6. Donner l'équivalent volumique des forces de viscosité.
7. Donner l'expression de l'équation de Navier-Stokes.
8. Quelles sont les conditions aux limites applicables à un fluide parfait ? Un fluide visqueux ?
9. Comment peut-on interpréter la viscosité d'un fluide ?
10. Quelle est l'expression du nombre de Reynolds ? À quoi correspond-t-il ?
11. Décrire qualitativement l'écoulement autour d'une sphère lorsque le nombre de Reynolds augmente.
12. Décrire la couche limite, donner un ordre de grandeur de son épaisseur. Définir un écoulement parfait.

II. Nombre de Reynolds ♪

Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement du pétrole dans l'oléoduc de l'Alaska dont le diamètre est de 1,2 m. Le pétrole brut a une masse volumique de 850 kg.m^{-3} et une viscosité de $0,3 \text{ Pa.s}$. il s'écoule avec un débit de 3400 L.s^{-1} . L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

III. Viscosimètre de Couette ♪

Un liquide de viscosité η , de masse volumique μ et de viscosité cinématique ν homogènes, se trouve entre deux cylindres coaxiaux de hauteur L et de rayon r_1 (cylindre (1)) et $r_2 > r_1$ (cylindre (2)).

Le cylindre (1) est suspendu à un fil de torsion exerçant sur lui un moment $-C\alpha$ lorsqu'il tourne d'un angle α autour de l'axe Oz . Un opérateur impose au cylindre (2) une rotation à vitesse angulaire ω constante en exerçant un couple $\Gamma \vec{u}_z$.

En régime stationnaire, le cylindre (1) s'immobilise en tournant d'un angle α_{eq} par rapport à sa position initiale.

On suppose le champ des vitesses de la forme $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{u}_\theta$, que le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ est uniforme et que le champ de pression est de la forme $p(r, z)$.

On néglige les effets de bords qui se produisent au fond ($z = 0$) et au sommet ($z = L$) des cylindres : en particulier on renonce à écrire une condition aux limites sur le champ des vitesses.

On donne l'expression de la force de viscosité exercée sur un élément de surface $d\vec{S} = dS\vec{u}_r$ par le fluide situé au-delà de r sur le fluide situé en deçà de r :

$$d\vec{F} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) dS \vec{u}_\theta$$

1. Calculer le moment de cette force $d\vec{F}$ par rapport à l'axe Oz . En déduire que le moment total par rapport à Oz des forces exercées sur le cylindre de rayon r par le fluide situé au-delà de r sur le fluide situé en deçà de r vaut :

$$\Gamma(r) = 2\pi\eta r^3 L \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right)$$

2. En appliquant le théorème du moment cinétique au fluide contenu dans un volume bien choisi, justifier soigneusement que $\Gamma(r)$ ne dépend pas de r ; il s'agit donc d'une constante.

3. En déduire l'expression de $\vec{v}_\theta(r)$ en fonction de ω , r , r_1 et r_2 en exploitant les conditions aux limites imposées par les cylindres pour éliminer les constantes inconnues.
4. En déduire l'expression du moment Γ par rapport à Oz des forces exercées par le fluide sur le cylindre (1) en fonction de η , r_1 , r_2 , L et ω . Justifie que la mesure de α permet celle de η . Quel est l'intérêt d'avoir plusieurs vitesses de rotation ω possibles pour un même appareil ?

IV. Plaque oscillante ♪♪

On considère une plaque infinie dans le plan Oxz , elle oscille selon x : $x(t) = A \sin(\omega t)$. La plaque est placée au fond d'un bassin rempli d'un liquide de viscosité cinématique ν .

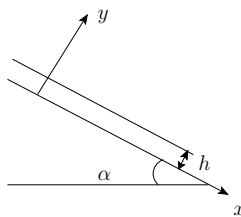
1. Que pouvez-vous déduire de l'étude des symétries sur le champ de vitesse ?
2. Établir l'équation vérifiée par la vitesse.
3. Justifier que l'on peut chercher une solution de la forme : $v_x(y) = \underline{V}_m(y) \exp(i\omega t)$.
4. Donner la forme de la solution.
5. La plaque vibre à 2 Hz, elle est en contact avec un liquide de viscosité cinématique $\nu = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Sur quelle distance se propage le mouvement ?
6. Est-il possible de cisailer un liquide sur une grande distance ?
7. Lors d'un tremblement de Terre une onde de compression et deux ondes de cisaillement sont émises. Aux antipodes un sismomètre n'enregistre plus qu'une onde. Que concluez-vous sur le noyau de la Terre ?

V. Écoulement d'un fluide visqueux ♪♪

Un fluide, de masse volumique μ , de viscosité η est en écoulement incompressible et stationnaire le long d'un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle α .

Le champ des vitesses s'écrit : $\vec{v} = v(y)\vec{u}_x$

1. Déterminer le champ de pression et celui des vitesses.
2. Calculer le débit (volumique) à travers une largeur ℓ et la vitesse moyenne.
3. Comment peut-on définir le nombre de Reynolds de cet écoulement ? Pour l'eau, on trouve $Re = 2000$ et pour l'huile $Re = 1$. Pour quel fluide le modèle est-il adapté ?



VI. Viscosimètre ♪♪

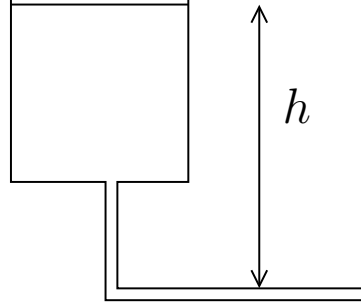
Un récipient cylindrique vertical, de diamètre $D = 5 \text{ cm}$ est terminé par un tube horizontal de diamètre $d = 1 \text{ mm}$ et de longueur $L = 40 \text{ cm}$.

Un liquide visqueux et incompressible s'écoule lentement. Sa hauteur h passe de 5 cm à 2,5 cm en une heure et quart.

On admet que le débit dans le tube horizontal est donné par la loi de Poiseuille :

$$D_v = \frac{\Delta p}{128\eta L} \pi d^4$$

où Δp est la différence de pression entre les deux extrémités du tube. Déterminer la viscosité cinématique du liquide.



VII. Écoulement du sang dans le système artériel ♪♪

On peut représenter de manière très schématique l'écoulement dans le système artériel par un réseau de tubes qui se subdivisent de plus en plus à partir de l'aorte jusqu'au plus fins capillaires. Si on classe les vaisseaux en 5 étages de ramification, le nombre N de vaisseaux à chaque étage, le diamètre moyen d , la section totale $S = N\pi\frac{d^2}{4}$, le volume total $V = SL$ et la longueur moyenne L de chaque vaisseau sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Étage	Aorte	Grosses artères	Branches artérielles	Atéριοles	Capillaires
N	1	40	7100	$1,6 \cdot 10^8$	$5,5 \cdot 10^9$
d cm	2,6	0,8	0,06	0,002	0,009
S cm ²	5,3	20	20	500	3500
V cm ³	180	250	250	125	300
L cm	34	12,5	12,5	0,25	0,086

L'écoulement du sang à la sortie du cœur est caractérisé par la fréquence f qui est la pulsation cardiaque que l'on supposera égale à 60 battements par minute. On assimilera le sang à un fluide newtonien, de viscosité cinématique égale à $3 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, de masse volumique égale à celle de l'eau.

On rappelle que dans un écoulement de Poiseuille cylindrique, le débit est donné par :

$$D_v = \frac{\Delta p}{8\eta L} \pi R^4$$

1. Quelle est, en ordre de grandeur, la distance δ sur laquelle la quantité de mouvement diffuse pendant un temps égal à la période des battements cardiaques ?
2. Au cours du cycle cardiaque, le sang est brusquement éjecté dans l'aorte. À partir de quel étage peut-on considérer que l'écoulement est un écoulement de Poiseuille ?
3. En supposant que l'écoulement dans tout le système artériel est un écoulement de Poiseuille, calculer la différence de pression entre la partie terminale de l'aorte et l'extrémité des capillaires. Le débit sanguin moyen est de 5 litres par minute. Calculer le nombre de Reynolds dans chaque partie du système artériel. Commenter.

VIII. Mécanique des fluides artistique ♪♪♪(ordre de grandeur et loi d'échelle)

Au jardin d'acclimatation, on propose aux enfants une attraction où ils font de la peinture artistique automatique : une feuille de papier de rayon $R = 10 \text{ cm}$ est fixée sur un plateau tournant à une vitesse angulaire de $\omega = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, constante autour d'un axe vertical fixe Oz .

L'enfant fait chuter une goutte de peinture verticalement (masse volumique μ , viscosité η et viscosité cinématique $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) sur la feuille et la goutte s'étale en un mince film d'épaisseur $h < 0,1 \text{ mm}$. La durée typique de l'étalement est $\tau = 100 \text{ s}$. Il peut alors recommencer avec d'autres gouttes.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'étalement de la goutte à l'aide d'un modèle semi-quantitatif proposé par Pierre-Gilles de Gennes (prix Nobel français en 199X).

Le modèle est le suivant : la goutte a été déposée au centre O et forme à l'instant t un film de rayon $R(t)$ et d'épaisseur maximale (au centre) $h(t) \ll R(t)$. Son volume reste constant, ce qui donne en ordre de grandeur la relation suivante :

$$h(t)R(t)^2 = h_0 R_0^2$$

Dans le référentiel tournant l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} p + \mu \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} - 2\mu \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \mu \omega^2 \vec{OM}$$

De plus la goutte étant assez plate et de faible épaisseur, on suppose le champ de pression uniforme.

1. Indiquer la signification des différents termes de l'équation de Navier-Stokes. En évaluant des nombres sans dimension, montrer que les termes contenant la vitesse sont négligeables devant la force volumique de viscosité.
2. Exprimer, en ordre de grandeur, la puissance due au force de viscosité en fonction de η , $R(t)$, $h(t)$ et $\dot{R}(t)$.
3. À quelle force est principalement dû l'étalement ? Exprimer de même la puissance motrice en fonction de μ , ω , $R(t)$, $h(t)$ et $\dot{R}(t)$.
4. En déduire qu'en ordre de grandeur :

$$R^3 \frac{dR}{dt} = \frac{\omega^2 R_0^4 h_0^2}{\nu}$$

En déduire l'expression de $R(t)$ et évaluer la durée τ pour qu'une goutte de volume initial $V_0 = 10^{-8} \text{ m}^3$ s'étale jusqu'en $R_{max} = 10 \text{ cm}$.

IX. Effet Coandă ♪

Henri Coandă, né le 7 juin 1886 et mort le 25 novembre 1972 à Bucarest, est un ingénieur aéronautique roumain, pionnier de l'aviation mondiale et du moteur à réaction.

On considère la manipulation faite avec un sèche cheveux et une balle de ping-pong. Dessiner les lignes de champ. En déduire la direction de l'accélération des particules de fluide autour de la balle. Montrer que cela permet à la balle de rester en l'air.

X. Conséquence des tempêtes ♪

Expliquer pourquoi le toit d'une maison peut s'envoler lors d'une tempête (on pourra utiliser le théorème de Bernouilli de manière qualitative).

XI. Effet Magnus ♪

Si on frappe une balle sans effet particulier celle-ci va tout droit. Par contre si on la fait tourner en la frappant (balle liftée au tennis ou brossée au football), sa trajectoire dévie par rapport à la trajectoire rectiligne précédente. Expliquer.

XII. Chute de boules dans l'air

Dans le vide une boule de pétanque et une balle de tennis (lâchées de la même hauteur simultanément) arrivent en même temps. Qu'en est-il dans l'air, en supposant les deux de mêmes rayons ?

XIII. Jet issu d'un robinet ♪

Le jet d'eau provenant d'un robinet a un diamètre moins important au fur et à mesure qu'il tombe. Expliquer pourquoi. Exprimer ce diamètre en fonction de la distance d par rapport au robinet (celui-ci a un diamètre D et l'eau sort à la vitesse $\vec{v}_0$). Effectuer l'application numérique en donnant des valeurs raisonnables aux grandeurs qui interviennent

XIV. Aération d'un terrier ♪

Dans les prairies Nord-américaines, les chiens de prairie (proche cousin de la marmotte alpine) construisent deux types d'entrée pour leurs terriers : l'une haute, en forme de cratère, l'autre basse, en forme de dôme. Expliquer pourquoi ce système permet l'aération du terrier.

XV. Augmentation de la vitesse d'un fluide ♪

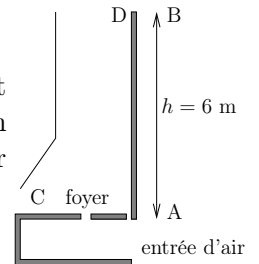
De l'eau, de masse volumique μ constante s'écoule en régime stationnaire dans un canal rectiligne d'axe Ox , à fond plan horizontal de cote $z = 0$, de largeur $L(x)$. On note $h(x)$ la cote de la surface libre de l'eau, où l'atmosphère impose une pression uniforme P_0 . Le champ des vitesses est approximativement de la forme $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$. En exprimant la conservation du débit massique et la relation de Bernoulli montrer que :

$$(F^2 - 1)\frac{dv}{v} = \frac{dL}{L} \text{ où } F = \frac{v}{\sqrt{gh}}$$

F est appelé nombre de Froude. En déduire comment doit varier $L(x)$ pour que la vitesse augmente.

XVI. Étude d'une cheminée ♪

On étudie l'écoulement de l'air dans une cheminée. La température à l'intérieur du conduit est supposée constante, égale à 150°C . La température extérieure est de 10°C , la pression extérieure de 1 bar. L'air est assimilé à un gaz parfait. À l'extérieur, on considérera l'air immobile.



1. Calculer $p_A - p_B$ où A est un point au niveau de l'entrée de l'air et B un point en haut de la cheminée, tous les deux à l'extérieur.
2. Exprimer puis calculer la vitesse v_D à la sortie D du conduit en supposant que la vitesse de l'air est nulle en C.
3. En réalité la vitesse est plus faible. Pourquoi ?

XVII. Portance d'une aile d'avion ♪♪

On se place dans un modèle simple d'une aile cylindrique¹

L'aile d'avion est un cylindre d'axe Oz et de rayon R en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $U\vec{u}_x$. Loin de l'avion l'air est au repos. L'écoulement est étudié dans le référentiel de l'aile d'avion, il est supposé incompressible et irrotationnel.

Par une étude analogue à l'étude faite en cours (Hydro 2) sur la sphère, on obtient :

$$v_r = -U \cos(\theta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \text{ et } v_\theta = U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

1. Que vaut la vitesse à l'infini ? Dessiner les lignes de champ autour du cylindre.
2. Que vaut la vitesse sur l'aile ? En déduire la pression. En déduire sans calcul la valeur de la résultante des forces de pression en la justifiant.
3. Sur une aile réelle, l'existence d'une portance est équivalente à :

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} > 0, \text{ le contour } C \text{ étant orienté dans le sens trigonométrique}$$

Dans l'étude d'un vortex (cf étude du cours sur la tornade avec la taille de la tornade tendant vers 0), on peut écrire la vitesse sous la forme :

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

On propose donc de modifier la vitesse autour de l'aile par :

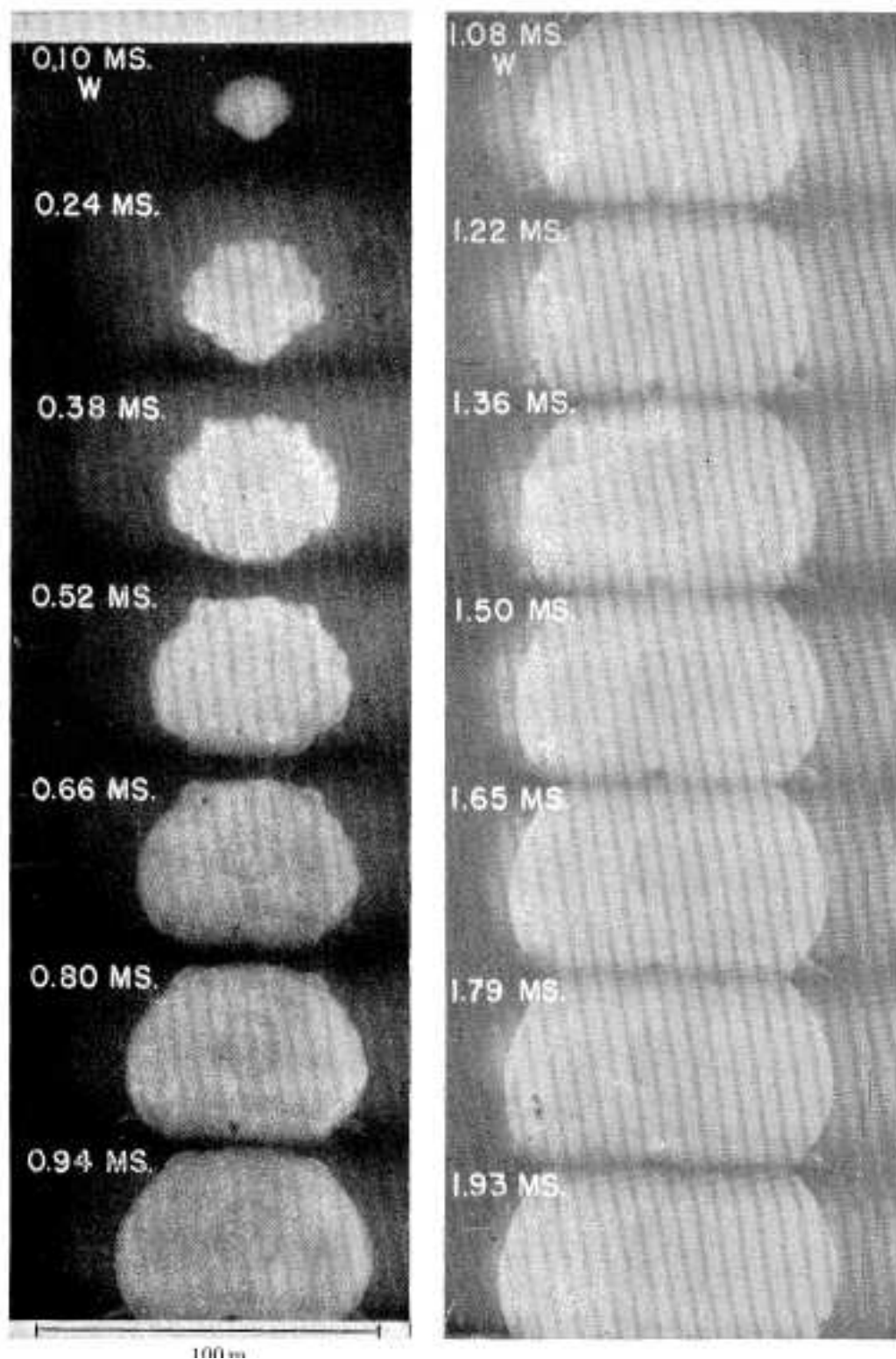
$$v_r = -U \cos(\theta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \text{ et } v_\theta = U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

En supposant l'aile cylindrique, donner l'expression de la force sur l'aile en fonction de Γ .

1. On montre que l'on peut passer du modèle cylindrique à la vraie aile d'avion par une transformation que l'on appelle transformation conforme, les résultats sur une aile cylindrique peuvent s'étendre à une aile.

XVIII. Secret défense ♪

En 1949, G.I. Taylor publie un article estimant la puissance d'une bombe A que les américains avaient fait exploser en 1945 au nouveau mexique.



Il a proposé comme loi d'échelle :

$$R = K t^\alpha \mu^\beta E^\gamma \text{ où } K \text{ est une constante multiplicative}$$

E l'énergie, t le temps depuis le début de l'explosion et μ la masse volumique du gaz.

1. Déterminer la loi exacte d'évolution et valider la à l'aide des photos disponibles ci-après.
2. Estimer l'énergie de la bombe si on considère $K = 1$.

XIX. La houle ♪♪(♪)

Il s'agit de modéliser une onde de gravité à la surface de l'eau, plus connue sous le nom de houle. Le modèle considère que l'onde est monochromatique plane progressive dans la direction de l'axe Ox . Le fluide est considéré parfait. L'axe z est dirigé vers le bas.

1. Montrer que l'accélération convective est négligeable devant l'accélération locale si la vitesse v est petite devant la vitesse de phase de l'onde ou encore si l'amplitude de l'onde est petite devant sa longueur d'onde. On se place dans le cadre de cette approximation dans toute la suite.
2. En utilisant la notation complexe et l'équation d'Euler, montrer que l'écoulement est irrotationnel.
3. On considère que la houle provoque un écoulement irrotationnel incompressible (et non-visqueux) dont le potentiel des vitesses est :

$$\Phi = f(z)\cos(\omega t - kx)$$

Quelle équation différentielle est vérifiée par $f(z)$?

4. Justifier qu'en $+\infty$, $f(z) = 0$. En déduire $f(z)$.
5. Déterminer la trajectoire d'une particule de position moyenne (x_1, y_1, z_1) .
6. Soit $\zeta(x, t)$ l'équation de la surface de l'eau, l'origine de Oz étant la surface au repos. Justifier l'approximation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

7. Démontrer que :

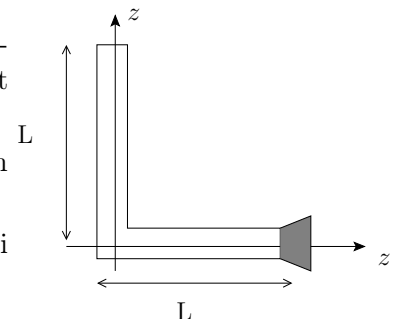
$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu g z + P = 0$$

8. Déduire des deux conclusions précédentes une équation aux dérivées partielles vérifiée par Φ et en déduire la relation de dispersion. Commenter le résultat.
9. Que se passe-t-il dans un bassin de profondeur fini H ?

XX. Vidange d'un tube en L ♪♪♪

Un tube en L, de faible section est rempli d'un fluide parfait homogène et incompressible. L'extrémité supérieure A est ouverte alors que l'extrémité inférieure B est fermée par un bouchon. À l'instant $t = 0$, on ôte le bouchon.

1. Déterminer, juste après la suppression du bouchon, la chute de pression en tout point du tube.
2. Exprimer le temps de vidange (sans chercher à calculer les intégrales qui apparaissent).



XXI. Théorème de Toricelli (oral CCP) ♪♪

Un réservoir cylindrique de section S rempli d'eau se termine par un tube horizontal de longueur L et de section $s \ll S$ situé à sa base et fermé par un robinet qu'on ouvre à l'instant $t = 0$. Initialement la hauteur d'eau dans le réservoir est h_0 ; à l'instant t on la note $h(t)$.

1. Une fois le robinet ouvert, on suppose l'écoulement unidimensionnel à l'interface air-eau dans le réservoir, avec $\vec{v}(M, t) = -V(t)\vec{u}_z$ et dans le tube horizontal où $\vec{v}(M, t) = \vec{v}(x, t)\vec{u}_x$. Montrer que :

$$v(x, t) = \frac{S}{s} V(t) = -\frac{S}{s} \frac{dh}{dt}$$

Que peut-on dire alors de $V(t)$?

2. En dehors d'une phase de courte durée, on constate que $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$, c'est à dire la même valeur que pour un point matériel en chute libre. Montrer que ceci peut s'interpréter en appliquant le théorème de Bernoulli dans le cadre des régime quasi-stationnaire.
3. En déduire une expression de $h(t)$ en fonction de S, s, h_0, g, t , puis l'expression de la durée T nécessaire pour vider le réservoir. Analyser la pertinence de l'influence de S, s, g et h_0 sur T .
4. On s'intéresse au régime transitoire initial au cours duquel la vitesse $v(t)$ atteint sa valeur $\sqrt{2gh_0}$ en régime quasi-stationnaire sans que le niveau h_0 dans le réservoir ait eu le temps de varier notablement. En négligeant l'accélération locale dans le réservoir, mais pas dans le tube, montrer que :

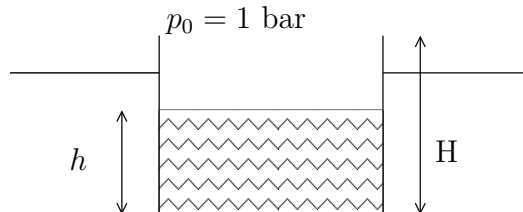
$$2L \frac{dv}{dt} = 2gh_0 - v^2$$

et chercher une solution de la forme $v(t) = v_\infty \tanh(t/\tau)$; exprimer v_∞ et τ en fonction de g, h et L . Comparer T et τ .

5. Lorsque le tube est trop fin, le modèle est faux. Pourquoi ?

XXII. Naufrage d'un bateau ♪♪

On étudie un bateau qui coule (l'Érika par exemple). La mer est considérée comme un fluide incompressible et parfait, de masse volumique ρ . On note $H = 20$ m, la hauteur du bateau, $M = 50\,000$ t sa masse et $S = 8500$ m² sa surface de base.

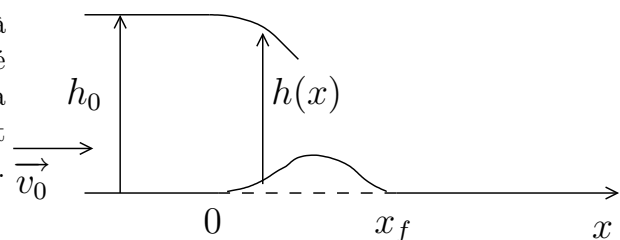


1. On considère que le bateau est rempli d'eau sur une hauteur h . Quelle est la hauteur h_m à partir de laquelle le bateau coule ?
2. On considère maintenant que le bateau est initialement vide et qu'il se remplit par un petit trou de surface $s \ll S$ situé dans la coque à une hauteur $\ell = 4$ m du fond. On prendra $s = 2$ m².
 - a) Décrire les différentes étapes du remplissage
 - b) Déterminer $h(t)$ pendant la première phase et calculer t_1
 - c) Déterminer $h(t)$ pour $t > t_1$.
 - d) Quelle est la durée du naufrage ?

XXIII. Écoulement au-dessus d'une bosse ♪♪♪

Un fluide incompressible (eau de masse volumique μ) s'écoule à la vitesse v_0 dans un canal rectangulaire à fond plat, excepté sur l'intervalle $[0, x_f]$ où il présente une bosse modélisée par la fonction $y(x)$ continue et dérivable (avec $y(0) = y(x_f) = 0$ et $y'(0) = y'(x_f) = 0$), x_m est la position du maximum de la bosse. Le régime est stationnaire et on néglige les effets de la viscosité.

En amont de la bosse, on suppose que $F_0 = \frac{v_0}{\sqrt{gh_0}} < 1$. On cherche l'équation de la surface libre.



1. Montrer que $(gh(x) - v^2(x)) \frac{dv}{dx} = gv \frac{dy}{dx}$
2. On pose $F(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{gh(x)}}$. En déduire l'expression de $\frac{dh}{dx}$ en fonction de $F(x)$ et de $\frac{dy}{dx}$
3. On pose $z(x) = h(x) + y(x)$. Montrer que $z(x)$ et $h(x)$ varient de la même façon.
4. On étudie alors l'évolution de $h(x)$ et celle de $z(x)$.
 - a) Premier cas, $F(x)$ reste toujours inférieur à 1. Montrer que la surface libre présente un creux entre $x = 0$ et $x = x_f$, le minimum se situant exactement en x_m , la hauteur de fluide étant la même en amont et en aval de la bosse. Dessiner la forme de la surface dans ce cas.
 - b) Deuxième cas : $F(x)$ atteint la valeur 1. Prouver alors que cela se produit en $x = x_m$. Montrer que la hauteur de la surface libre peut diminuer de manière monotone entre 0 et x_f . Dessiner la forme de la surface dans ce cas.
5. On prend $h_0 = 1$ m, $v_0 = 1,2$ m.s⁻². La bosse présente une hauteur maximale de $d = 5,0$ cm. En déduire la nature de l'écoulement et calculer les caractéristiques de la surface libre.

XXIV. Critère de Mach ♠♠

On considère un écoulement parfait, stationnaire dans un fluide compressible autour d'un obstacle profilé, décrit par les champs :

$$\vec{v}(M) = U\vec{u}_x + v_{1x}(x, y)\vec{u}_x + v_{1y}\vec{u}_y; p(M) = p_0 + p_1(x, y); \mu(M) = \mu_0 + \mu_1(x, y)$$

où v_{1x}/U , v_{1y}/U , p_1/p_0 et μ_1/μ_0 sont des infiniments petits de même ordre. On limite les calculs à l'ordre 1.

1. Linéariser l'équation d'Euler et montrer que : $\mu_0 U \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$ et $\mu_0 U \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y}$
2. Linéariser de même l'équation de conservation de la masse.
3. Le fluide est compressible et l'écoulement parfait de telle sorte que l'on peut écrire $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$ où χ_s est le coefficient de compressibilité isentropique. On définit la célérité du son par $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_s}$. montrer que :

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + (1 - M^2) \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} = 0$$

où M est le nombre de Mach dont on donnera l'expression. À quelle condition l'écoulement est-il incompressible ,

XXV. Écoulement du ketchup ♠♠♠

On considère l'écoulement laminaire, stationnaire, irrotationnel et incompressible du ketchup assimilé à un fluide visqueux, de masse volumique μ dans une conduite verticale et cylindrique sous le seul effet de la pesanteur. On suppose que la pression ne varie pas le long du tube. On note Oz l'axe du tube. Le champ eulérien des vitesses est, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$$

, où r est la distance du point M à l'axe du tube, et où le vecteur $\vec{u}_z$ est orienté dans le même sens que l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

On note $\sigma(r)$ la projection sur $\vec{u}_z$ de la force tangentielle surfacique que le fluide situé à l'intérieur du cylindre de rayon r exerce sur le fluide à l'extérieur du cylindre de rayon r . Le ketchup est un fluide non newtonien caractérisé par le comportement rhéologique suivante :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\sigma_0 - \sigma(r)}{\eta} \text{ pour } \sigma(r) \geq \sigma_0 \text{ nul sinon.}$$

Les deux paramètres σ_0 et η (homogène à une viscosité dynamique) sont deux caractéristiques du fluide étudié.

1. On considère une particule de fluide, comprise entre z et $z + dz$ et entre r et $r + dr$. Établir l'équation différentielle du mouvement de la particule de fluide.

2. Intégrer cette équation et donner l'expression de $\sigma(r)$.
3. En déduire l'expression du champ des vitesses. On sera amené à distinguer deux cas, selon que r est supérieur ou inférieur à un rayon caractéristique r_0 . On fera l'hypothèse : $r_0 \leq R$.
Donner l'allure du champ des vitesses en fonction du rayon r . Expliquer pourquoi on parle d'écoulement bouchon.
4. Donner l'expression du champ des vitesses lorsque $r_0 \geq R$. Déterminer l'ordre de grandeur du rayon minimal d'un tube permettant l'écoulement du ketchup : σ_0 de l'ordre de 50 Pa, η de l'ordre de 10^6 Pa.s et $\mu = 1,4 \text{ kg.m}^{-3}$.

