

TD N°1 : MÉCANIQUE DU POINT

I. Questions de cours

1. Définir un référentiel.
2. Définir le point coïncident.
3. Loi de composition des vitesses et des accélérations pour un mouvement de translation.
4. Loi de composition des vitesses et des accélérations pour une rotation uniforme autour d'un axe fixe.
5. Donner l'expression de la force d'inertie de Coriolis. Donner l'expression de la force d'inertie d'entraînement : cas particuliers ?
6. Caractéristiques de la force de Coriolis.
7. Caractéristiques de la force d'inertie d'entraînement.
8. Loi de la quantité de mouvement, loi du moment cinétique, loi de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen.
9. Définition du poids. Ordres de grandeurs associés.
10. Caractère non galiléen du référentiel géocentrique.

II. Lancer de balle dans une voiture ♪

Une voiture se déplace sur une route en ligne droite. Un enfant assis à l'arrière joue avec une balle de masse $m = 50 \text{ g}$, il la lâche d'une hauteur h .

1. On suppose que la voiture roule à 50 km.h^{-1} . Déterminer la trajectoire de la balle dans le référentiel lié à la voiture, dans le référentiel lié au sol. Déterminer la vitesse de la balle juste avant qu'elle touche le sol de la voiture. On introduira des ordres de grandeurs pertinents si nécessaire.
2. Mêmes questions dans le cas où la voiture accélère à $a = 3 \text{ m.s}^{-2}$, on considère que la voiture part à $t = 0$ à vitesse nulle et qu'à cet instant on lâche la balle.

III. L'ouragan Harvey ♪



L'ouragan Harvey a touché la Louisiane et le Texas fin août 2017. On voit ci-dessus une image de l'ouragan abordant le sud des États-Unis.

1. En modélisant l'ouragan comme un disque où le centre est à basse pression et la périphérie à haute pression, justifier le sens de l'enroulement des vents.
2. Que se passe-t-il pour un anticyclone ?

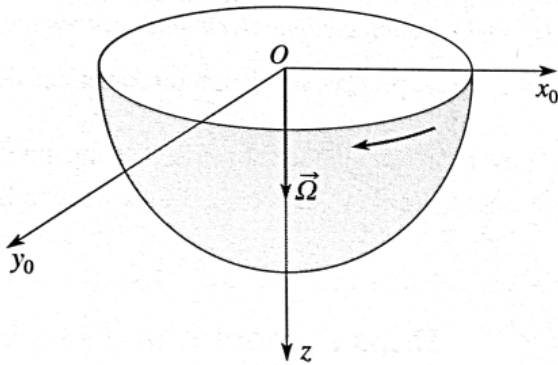
IV. masse d'une boule ♪♪

Soit une boule de rayon a .

1. Donner l'expression de sa surface et de son volume.
2. Cette boule est en bois $\mu_0 = 800 \text{ kg.m}^{-3}$. Quelle est sa masse si $a = 5 \text{ cm}$?
3. Cette boule est maintenant en composite tel que $\mu = \mu_0 \frac{r}{a}$. Quelle est sa masse ?

V. Bille sur une sphère tournante ♪♪

Un point matériel se déplace sans frottements sur la surface intérieure d'une demi-sphère creuse, de centre O , de rayon a , qui tourne uniformément à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe verticale descendant (Oz). Le référentiel fixe $\mathcal{R}_0(O, x_0, y_0, z_0)$ est supposé galiléen, le référentiel $\mathcal{R}$ est lié à la sphère (voir la figure ci-dessous).



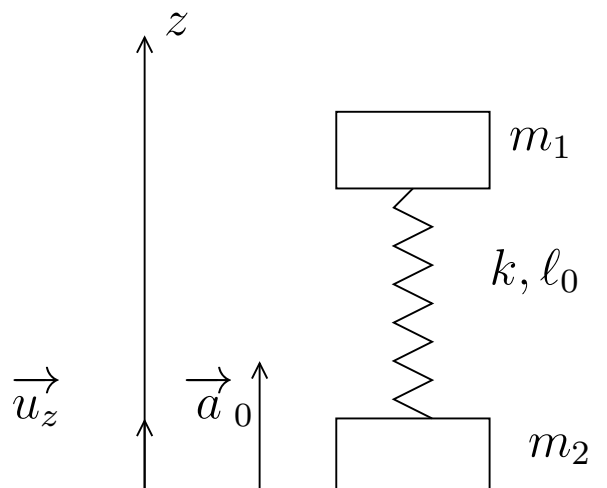
1. Montrer que le poids et la force d'inertie d'entraînement dérivent d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ que l'on exprimera en fonction de z uniquement (et des constantes de l'exercice). On prendra l'origine des énergies potentielles en $z = 0$.
2. Que peut-on dire, dans le référentiel tournant $\mathcal{R}$, du travail de la réaction du support et du travail de la force d'inertie de Coriolis ?
3. On pose $\zeta = \frac{z}{a}$ et $\alpha = \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$. Exprimer $\mathcal{E}_p$ en fonction de ζ , α , m , Ω et a . Tracer la courbe $\mathcal{E}_p(\zeta)$ et discuter qualitativement des différents mouvements possibles de M suivant la valeur de son énergie mécanique totale $\mathcal{E}_M$ (dans le référentiel $\mathcal{R}$). On prendra $\Omega = \frac{5\omega_0}{3}$.
4. Pour quelle valeur de $\mathcal{E}_M$ le point évolue-t-il dans un plan horizontal ? Quelle est la valeur de z correspondante ?

VI. Décollage d'une masse d'un plateau ♪♪♪

Deux masses m_1 et m_2 , reliées par un ressort idéal de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , sont disposées verticalement sur un plateau horizontal.

L'ensemble est initialement immobile dans le référentiel terrestre galiléen. Le plateau est alors accéléré uniformément à $\vec{a}_0 = a_0 \vec{u}_z$ (a_0 algébrique) par rapport au sol.

Déterminer les valeurs de a_0 permettant un décollement de la masse m_2 du plateau.



VII. Déviation vers l'Est ♪♪♪

En 1830, Reich effectue l'expérience suivante : il lâche sans vitesse initiale une masse m dans un puits de mine de haute $h = 150$ m. La latitude de l'expérience est $\lambda = 50^\circ$ (hémisphère nord). On note Ω la vitesse de rotation de la Terre sur son axe.

Son objectif était de mettre en évidence le rôle de la force de Coriolis due à la rotation de la Terre.

1. Par une analyse qualitative du problème, montrer que l'on s'attend à une déviation vers l'Est du projectile.
Nous allons maintenant estimer numériquement la valeur de cette déviation par approximation successive.
2. Soit O le point à partir duquel on lâche l'objet. Oz correspond à la verticale locale, Oy est dirigé vers le Nord et Ox vers l'Est. Établir les équations du mouvement dans le référentiel terrestre.
3. Justifier numériquement qu'il est raisonnable de considérer les termes en Ω comme des infiniments petits.
4. Résoudre alors les équations du mouvement à l'ordre 0. Que retrouve-t-on ?
5. En reportant, dans les équations du mouvement, les valeurs obtenues de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ dans la question précédente, donner l'expression des équations du mouvement à l'ordre 1.
6. En déduire la déviation Δx due à la force de Coriolis. Effectuer l'application numérique.
7. Que constate-t-on si on poursuit à l'ordre 2 ? Est-ce significatif ?
8. Par une étude dans le référentiel géocentrique, retrouver le résultat précédent.

VIII. Un petit tour de manège ♪♪

Un manège appelé le rotor fonctionne de la façon suivante : un énorme cylindre de rayon a vertical tourne autour de son axe, les passagers s'installent en se plaçant contre les parois. Le cylindre est mis en rotation. Quand la vitesse de rotation est suffisamment grande, le plancher est retiré. On note g l'accélération de la pesanteur.

1. Qu'arrive-t-il aux passagers ? Que ressentent-ils quand ils essaient de bouger un bras ou une jambe ?
2. On note $f = 0,4$ le coefficient de frottement. Rappeler les lois de Coulomb pour le frottement.
3. Déterminer la valeur minimale de la vitesse de rotation pour laquelle on peut retirer le plancher sans risque pour les passagers.
4. Faire l'application numérique.

IX. Transport express ♪

Une caisse assimilée à un point matériel de masse m est posée sur la plate-forme horizontale d'un camion initialement au repos dans le référentiel terrestre $(R) = (Oxyz)$ supposée galiléen. Le champ de pesanteur est supposé uniforme. Le coefficient caisse/camion est noté f .

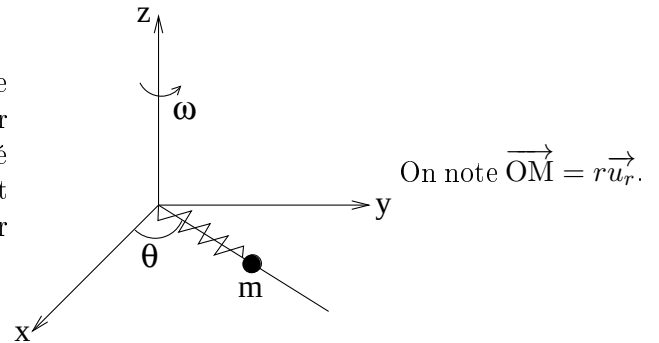
À partir de l'instant $t = 0$ le camion accélère uniformément avec $\vec{a} = a_0 \vec{u}_x$ avec a_0 une constante positive. On note :

$$\vec{R} = \overline{T} \vec{u}_x + \overline{N} \vec{u}_z$$

1. On suppose que la caisse ne glisse pas sur la plate-forme.
 - a) Déterminer $\overline{T}$ et $\overline{N}$. En déduire une condition sur a_0 , f et g pour valider cette situation.
 - b) Exprimer l'énergie cinétique de la caisse dans le référentiel absolu. D'où provient-elle ?
2. On suppose que la caisse glisse sur la plate-forme avec une vitesse parallèle à $-\vec{u}_x$
 - a) Déterminer la vitesse de la caisse dans le référentiel du camion et en déduire une condition sur a_0 , f et g pour valider cette situation.
 - b) Exprimer dans le référentiel absolu la puissance $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2}$ des actions exercées par le camion sur la caisse, la puissance $\mathcal{P}_{2 \rightarrow 1}$ des actions exercées par la caisse sur le camion et leur somme. Commenter.

X. Mouvement sur un axe tournant ♪♪

Soit un référentiel galiléen R , auquel on associe le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Dans le plan (O, x, y) , une tige tourne autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω . On a placé sur la tige un point matériel M fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur k , enfilé sur la tige et accroché en O , de longueur à vide $\ell_0 = r_0$. le mouvement se fait sans frottement.



1. Étudier les éventuelles positions d'équilibre du point M .
2. Déterminer la loi horaire $r(t)$. On prendra comme conditions initiales $r(0) = 2r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$. On discutera suivant les valeurs de k .
3. Déterminer les composantes de la réaction exercée par la tige sur M

XI. « Caramba encore raté ! » ♪♪

Dans les épreuve de tir à la carabine, un tireur dispose doit viser une cible, située au nord à 300 m de lui. La balle se déplace à une vitesse de 900 m.s^{-1} . On suppose qu'il règle l'orientation de sa carabine de manière à compenser les effets de la pesanteur terrestre. Il dirige sa carabine vers le centre de la cible.

1. La balle est-elle déviée de sa trajectoire ?
2. Si oui, estimer l'écart entre le centre de la cible et le point d'impact.

XII. Point matériel sur un plateau tournant ♪♪

Un plateau horizontal tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz vertical dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Une particule de masse m est abandonnée à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale par rapport au plateau en un point M_0 du plateau. On choisit les axes du référentiel $(OXYz)$ lié au plateau de telle sorte qu'à l'instant $t = 0$, d'une part, les axes Ox et OX coïncident ; et que, d'autre part $\vec{OM}_0 = a \vec{u}_X$. La masse se déplace sans frottements.

1. On se place dans le référentiel lié au plateau et on repère un point M par ses coordonnées cartésiennes X et Y . Établir les équations différentielles du deuxième ordre dont sont solutions $X(t)$ et $Y(t)$ et montrer que $\underline{u} = X(t) + iY(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 u = 0$$

2. Chercher des solutions proportionnelles à $\exp(rt)$ et en déduire les expressions :

$$X(t) = a(\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)) \text{ et } Y(t) = a(\omega t \cos(\omega t) - \sin(\omega t))$$

3. Retrouver le résultat en raisonnant dans le référentiel terrestre.
4. Tracer les trajectoires dans le référentiel tournant et dans le référentiel terrestre avec l'aide de Python.

XIII. Superman et la rotation de la Terre, mines-ponts 2019 (Merci à Loïse Quéré) ♪♪

La Terre de masse M_T et de rayon R_T possède un moment d'inertie $J = \frac{2}{5} M_T R_T^2$ autour de son axe. Au pôle Nord, la norme de $\vec{g}$ vaut $9,83 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Calculer $\vec{g}$ à l'équateur.
2. Montrer que si on place verticalement à l'équateur une perche assez grande alors on peut annuler son poids.

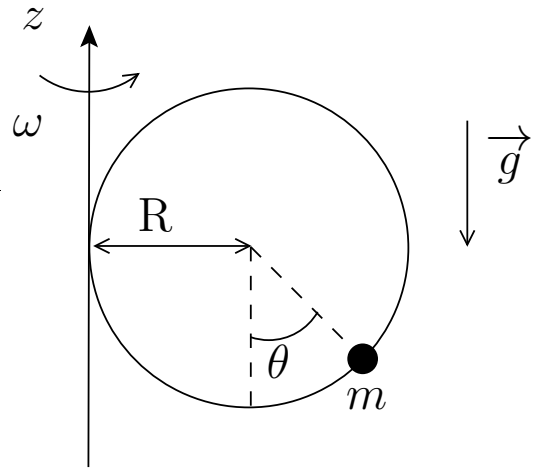
3. Que se passerait-il pour la même expérience réalisée au pôle nord ?
4. Dans le film de 1978, Superman souhaite ralentir puis inverser le sens de rotation de la Terre afin d'inverser le cours du temps. Pour cela il tourne autour de la Terre, en frottant sur l'atmosphère, dans le sens contraire de sa rotation dans un plan orthogonal à l'axe de rotation.

En ne considérant pas d'influence sur le temps, comment l'action de Superman pourrait-elle influencer le poids des rochers tombant sur Loïs Lane ? L'accident a lieu à une latitude $\lambda = 36^\circ$ nord, quelle influence pourrait-il y avoir sur le reste de la population ?

5. On modélise l'action de Superman sur la Terre par une force $\vec{F} = -v^2 \vec{u}$. Évaluez v puis Δt le temps nécessaire à Superman pour annuler le poids des rochers (on suppose superman non relativiste).

XIV. Cerceau tournant 🎵🎵🎵

Un anneau assimilé à un point matériel de masse m est assujéti à se déplacer sans frottement sur un cercle de rayon R vertical, tournant à vitesse angulaire ($\omega = 10 \text{ tr.s}^{-1}$) constante autour de l'axe Oz vertical tangent au cercle. $R = 20 \text{ cm}$.



1. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $\theta(t)$ et l'expression de la force exercée par le cercle sur l'anneau.
2. Que pouvez-vous en tirer pour θ petit ?
3. Déterminer graphiquement les positions d'équilibre. Discuter de leur stabilité.

XV. Limite de Roche 🎵🎵🎵

Remarque : lire l'annexe sur les marées afin de pouvoir traiter plus facilement cet exercice.

La comète Shoemaker-Lévy 9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter en morceaux à cause des « forces de marées » dues à Jupiter.

On propose de déterminer par un modèle simple la distance en dessous de laquelle la comète se disloque.

Hypothèses : Jupiter, de centre J est sphérique, homogène de rayon $R_J = 71400 \text{ km}$, de masse $M_J = 1,91 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ et de masse volumique μ_J . La comète, de centre C est sphérique et homogène, de rayon R_C , de masse volumique $\mu_C = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Le référentiel Jupitérocentrique est considéré comme galiléen. La comète n'est soumise qu'à l'action de Jupiter et est en orbite circulaire de rayon d (avec $R_C \ll d$).

1. Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un petit volume élémentaire au bord de la comète, de masse δm , dans le référentiel lié à la comète (cométocentrique). On considérera le petit volume sur l'axe CJ .
2. On suppose que la comète se disloque si le terme de marée dépasse le champ gravitationnel propre de la comète. En se plaçant à la périphérie de la comète pour comparer les deux termes, déduire l'ordre de grandeur de la distance limite d_{lim} à laquelle la comète peut s'approcher de Jupiter sans risque.

