

TD N°1 : MÉCANIQUE DU POINT

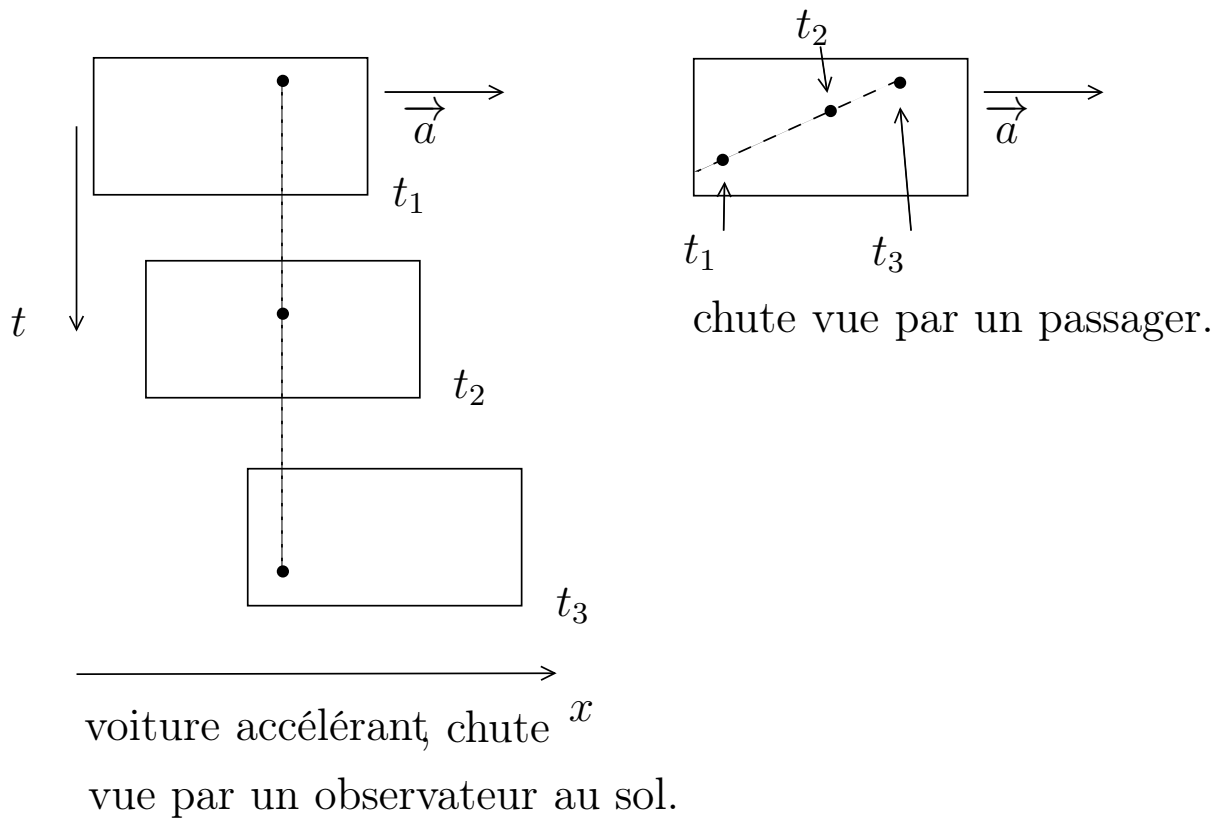
I. Questions de cours

II. Lancer de balle dans une voiture ♪

Petit exercice simple du point de vu des calculs, mais riche en réflexion. Faites des dessins pour comprendre ce qui se passe lorsque l'on passe d'un référentiel à l'autre.

- II.1** La voiture est un référentiel galiléen. Dans le référentiel lié à la voiture, il s'agit d'une chute libre sans vitesse initiale. Pour un passager de la voiture le mouvement se fait selon la verticale. Je vous laisse déterminer $z(t)$.
- II.2** Dans le référentiel lié au sol, la balle part avec une vitesse initiale de 50 km.h^{-1} . Il s'agit d'une chute libre avec vitesse initiale. Le mouvement est donc parabolique. Là encore, à vous de déterminer $z(t)$.
- II.3** Dans le référentiel lié à la voiture, il faut tenir compte de la force d'inertie d'entraînement dirigée vers l'arrière. La trajectoire est une droite de pente $\frac{g}{a}$. Là encore je vous laisse détailler les calculs.

Dans le référentiel lié au sol, il s'agit d'une chute libre verticale.



III. L'ouragan Harvey ♪

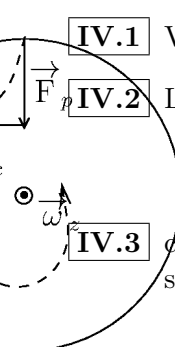
Sur le schéma $\vec{\omega}_z$ représente la composante utile du vecteur rotation (projection du vecteur rotation sur l'axe z de la verticale locale).

Voici qualitativement ce qui se passe : la force de Coriolis tend à faire partir les masses d'air sur leur droite par rapport à la situation qui prévaut en l'absence de rotation. Le centre de la dépression (ici un ouragan) est donc contourné par la droite et les vents tournent dans le sens trigonométrique (trajectoire en tireté).

Sur le schéma de droite on remarquera que les vents ont été dessinés convergeant vers le centre. Ceci pour prendre en compte les frottements air/sol qui font perdre de l'énergie au système (cela peut se traduire au sol par des arbres arrachés, voiture retournée ...).

Dans le cas d'un anticyclone les hautes pressions sont au centre et les basses pressions à l'extérieur. La déviation due à Coriolis est inversée. Les vents tournent dans le sens horaire.

IV. masse d'une boule ♪♪



IV.1 $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, $S = 4\pi a^2$

IV.2 La masse volumique est constante donc :

IV.3 cf explications données en cours. La masse volumique ne dépendant que de r , le volume élémentaire peut s'exprimer simplement : $dV = 4\pi r^2 dr$

$$m = \mu_0 \times \frac{4}{3}\pi a^3$$

ce de la force de Coriolis.

$$m = \int_0^a \mu(r) 4\pi r^2 dr$$

Pas de difficulté, je vous laisse finir le calcul.

V. Bille sur une sphère tournante ♪♪

V.1 Les E_p sont :

$$E_{pp} = -mgz + Cte \text{ et } E_{pie} = -m\omega^2 \frac{r^2}{2} + Cste2$$

r étant la distance à l'axe. Avec le théorème de Pythagore, on exprime r en fonction de z :

$$E_{pp} = -mgz + Cte \text{ et } E_{pie} = -m\omega^2 \frac{a^2 - z^2}{2} + Cste2$$

Soit :

$$E_p = -mgz - m\omega^2 \frac{a^2 - z^2}{2} + Cste3$$

Comme on impose $E_p(0) = 0$ alors :

$$E_p = -mgz + m\Omega^2 \frac{z^2}{2}$$

V.2 Il n'y a pas de frottements solide, la réaction ne travaille pas. La force de Coriolis est orthogonal à la vitesse, donc elle ne travaille pas non plus.

V.3 On obtient :

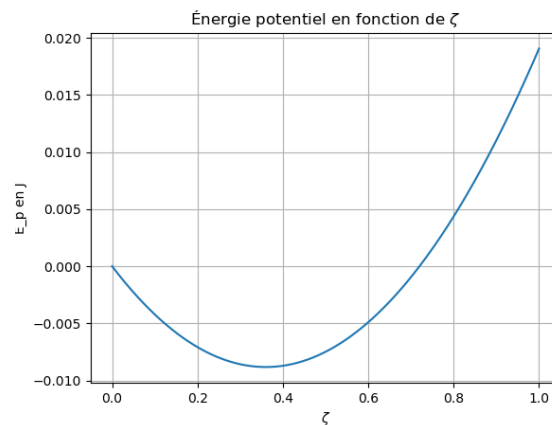
$$E_p = \frac{1}{2}m\Omega^2 a^2 \left(\left(\frac{z}{a} \right)^2 - 2 \frac{g}{a\Omega^2} \frac{z}{a} \right)$$

$$E_p = \frac{1}{2}m\Omega^2 a^2 (\zeta^2 - 2\alpha\zeta)$$

Si $E_M < 0$ alors la bille oscille dans le bol entre deux plans placés en z_{min} et en z_{max} .

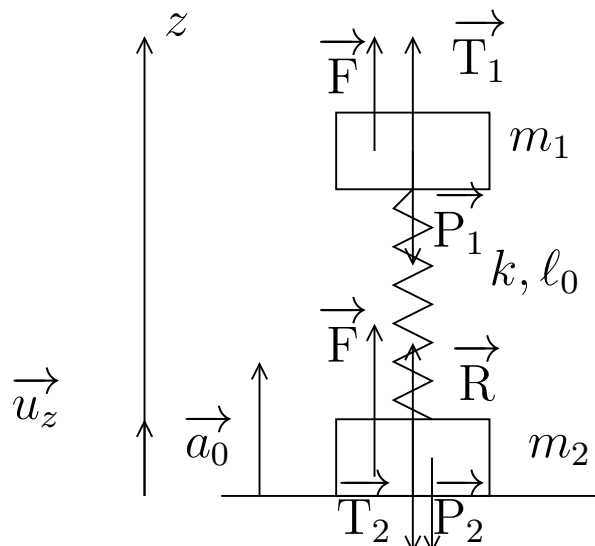
Si $E_M > 0$, la bille sort du bol.

La courbe admet un min en $\zeta = \alpha$: si $E_m = E_{pmin}$, alors mouvement circulaire dans le plan associé).



VI. Décollage d'une masse d'un plateau 🎵🎵🎵

Étudions tout d'abord la masse m_2 dans le référentiel associé au plateau :



D'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{F}_{ie} + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{R} = m_2 g \vec{u}_z + m_2 a_0 \vec{u}_z - k(\ell - \ell_0) \vec{u}_z$$

Il reste la longueur du ressort qui est inconnue pour cela, étudions la masse m_1 dans le même référentiel :

En appliquant de nouveau la relation fondamentale :

$$-k(\ell - \ell_0) \vec{u}_z - m_1 g \vec{u}_z - m_1 a_0 \vec{u}_z = m_1 \ddot{\ell} \vec{u}_z$$

$$\ddot{\ell} + \frac{k}{m_1} \ell = \frac{k\ell_0}{m_1} - m_1(g + a_0)$$

On en déduit :

$$\ell(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0 - \frac{m_1(g + a_0)}{k}$$

Avec les conditions initiales :

$$v(0) = 0 \text{ et } \ell(0) = \ell_0 - \frac{m_1 g}{k}$$

On en déduit :

$$B = 0 \text{ et } A = \frac{m_1 a_0}{k}$$

$$\ell(t) = \frac{m_1 a_0}{k} \cos(\omega_0 t) + \ell_0 - \frac{m_1(a_0 + g)}{k}$$

Ce qui permet d'avoir l'expression de la réaction au cours du temps :

$$R_z = m_2 g + m_2 a_0 - m_1 a_0 \cos(\omega_0 t) + m_1(a_0 + g)$$

$$R_z = (m_1 + m_2)g + m_2 a_0 + m_1 a_0(1 - \cos(\omega_0 t))$$

Pour être sûr que le système décroche il faut que la plus grande valeur de R_z reste négative :

$$(m_1 + m_2)g + m_2 a_0 + 2m_1 a_0 < 0$$

Soit :

$$a_0 < -\frac{(m_1 + m_2)g}{(m_2 + 2m_1)}$$

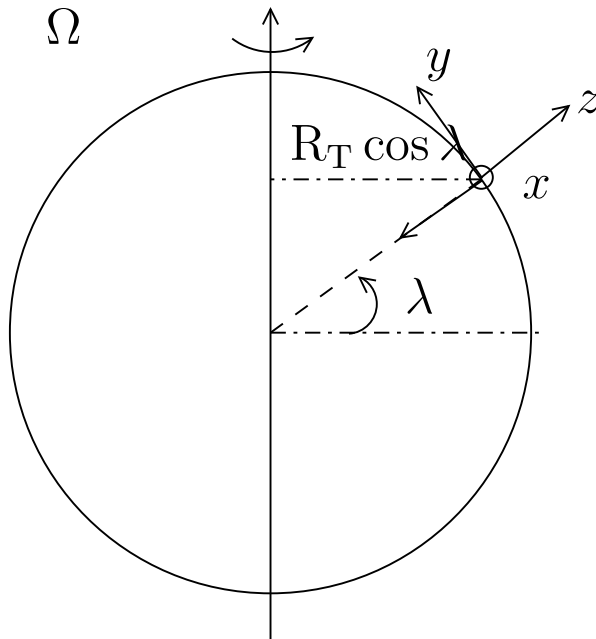
VII. Déviation vers l'Est 🎶🎶🎶

VII.1 Dans le référentiel terrestre considéré non galiléen (R_T) appliqué à la masse m .

Bilan des forces :

— Poids $\vec{P} = m \vec{g}$

— Force de Coriolis $F_{ic} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R_T}(M)$



Seule la force de Coriolis modifie la trajectoire (rappel la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre est incluse dans le poids).

Le projectile tombe essentiellement selon $-\vec{u}_z$ ($g \gg \|\Omega \wedge \vec{v}\|$). La règle de la main droite donne alors une force de Coriolis selon Ox c'est à dire vers l'Est.

VII.2 Voir le schéma précédent.

D'après la relation fondamentale de la dynamique (RFD) appliquée à m :

$$\vec{P} + \vec{F}_{ic} = m \vec{a}_{R_T}$$

En projection dans $Oxyz$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Omega \dot{z} \cos \lambda + 2\Omega \sin \lambda \dot{y} \\ -2\Omega \sin \lambda \dot{x} \\ -g + 2\Omega \cos \lambda \dot{x} \end{pmatrix}$$

VII.3 Ω est de l'ordre de $10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ au maximum de l'ordre de 10^3 m.s^{-1} . Ces termes sont au plus de l'ordre de 10^{-2} m.s^{-1} . il est donc légitime de considérer ces termes comme des infiniments petits.

VII.4 À l'ordre 0 en Ω :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ et enfin } z = -\frac{1}{2}gt^2$$

On retrouve la chute libre.

VII.5 En injectant le résultat à l'ordre 0 dans les équations du mouvement puis en intégrant :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \text{ et } y = 0 \text{ et } x(t) = \frac{1}{3}\Omega g \cos \lambda t^3$$

Ce résultat confirme la déviation vers l'Est ($x > 0$)

VII.6 à t_f le fond est atteint :

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ On en déduit :}$$

$$x(t_f) = \frac{1}{3}\Omega g \cos \lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

On obtient alors :

$$\Delta x = 2,5 \text{ cm}$$

Ce qui est bien négligeable sur les 150 m de chute.

VII.7 On réitère le procédé en injectant les résultats à l'ordre 1 dans les équations du mouvement. On aboutit selon y à :

$$y(t) = -\frac{1}{12}\Omega^2 g \sin(2\lambda)t^4 < 0$$

Terme correctif du deuxième ordre qui correspond à une déviation vers le Sud.

VII.8 Dans le référentiel géocentrique galiléen, il n'y aucune force selon x . À l'instant initial, le solde possède une vitesse :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) = R_T \cos \lambda \Omega \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{pmatrix}$$

Dans le bilan des forces, il n'y que la force de gravitation (on néglige la force d'inertie d'entraînement d'ordre 2 en Ω) :

$$\vec{F} = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{GM_T}{OM^3}\vec{OM}$$

En projection selon $\vec{u}_x$ avec $OM \approx R_T$:

$$-\frac{GM_T}{R_T^3}x = \ddot{x}$$

$$\text{Or } g \approx \frac{GM_T}{R_T^2}$$

$$-g\frac{x}{R_T} = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{R_T}x = 0$$

En utilisant les conditions initiales : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = R_T \cos \lambda \Omega$ et en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$.

On obtient alors :

$$x(t) = \frac{R_T}{\omega_0} \cos \lambda \Omega \sin \omega_0 t$$

Selon z :

$$\ddot{z} \approx -g$$

En négligeant les variations du champ gravitationnel selon h ($R_T - h \approx R_T$). Le temps de chute est toujours le même.

Dans le référentiel géocentrique, le fond du puits avance à $v = (R_T - h) \cos \lambda \Omega$ surant t_f . Le déplacement est donc :

$$\Delta x = \frac{R_T}{\omega_0} \cos(\lambda) \Omega \sin \left(\omega_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) - (R_T - h) \cos \lambda \Omega \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Or $\omega_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \sqrt{\frac{2h}{R_T}} \ll 1$. Ce qui permet d'écrire :

$$\sin \omega_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \omega_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{6} \left(\omega_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3$$

On en déduit :

$$\Delta x \approx \frac{R_T}{\omega_0} \cos \lambda \Omega \left(\omega_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{6} \left(\omega_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3 \right) - (R_T - h) \cos \lambda \Omega \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

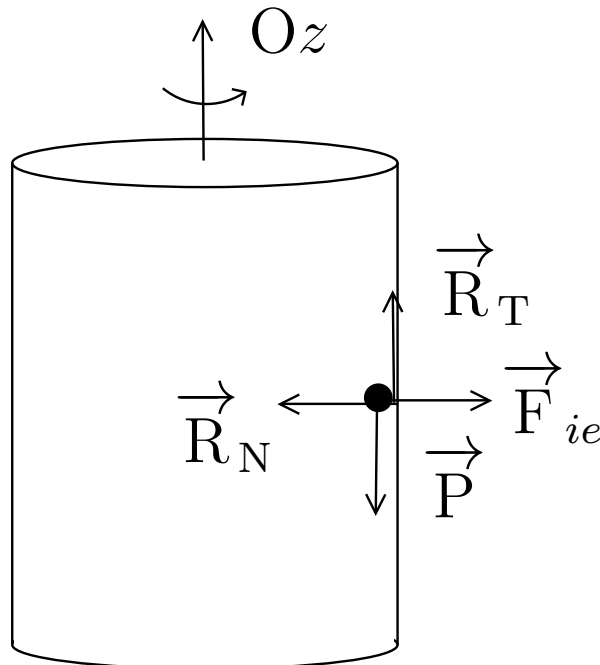
$$\Delta x \approx -\frac{1}{6} 2h \sqrt{\frac{2h}{g}} \Omega \cos \lambda + h \Omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Delta x \approx \frac{\Omega g \cos \lambda}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}$$

VIII. Un petit tour de manège ♪♪

VIII.1 Ils sont plaqués contre la paroi par la force d'inertie d'entraînement. Ils ne glissent pas à cause des frottements paroi/vêtements. Lorsqu'ils veulent bouger un membre, ils sentent une force qui tend à ramener ce dernier vers la paroi.

VIII.2 Dans le référentiel non galiléen, les passagers sont à l'équilibre relatif. La force de frottement doit compenser le poids, la réaction normale du cylindre s'oppose à la force d'inertie d'entraînement :



D'après le principe fondamentale de la dynamique dans le référentiel du cylindre :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} = m \vec{a}$$

En projection sur Oz :

$$-mg + R_{Tz} = 0 \text{ soit } R_{Tz} = mg$$

En projection sur $\vec{u}_r$:

$$R_{Nr} + m\omega^2 a = 0$$

Les passagers ne glissent pas tant que :

$$\|\vec{R}_T\| < \mu \|\vec{R}_N\|$$

$$mg < \mu m\omega^2 a$$

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{\mu a}}$$

On remarquera très logiquement que c'est d'autant plus facile que μ est grand.

VIII.3 On trouve : $\omega = 0,4 \text{ tr.s}^{-1}$

IX. Transport express ♪

IX.1 Plaçons-nous dans le référentiel lié au camion. Le système étudié est la caisse.

IX.1.a Bilan des forces :

- La réaction du camion,
- Le poids de la caisse,
- La force d'inertie d'entraînement : $-ma_0\vec{u}_x$.

D'après la relation fondamentale de la dynamique (RFD) :

$$-m\vec{a}_0 + \vec{T}\vec{u}_x + \vec{N}\vec{u}_z - mg\vec{u}_z = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{T} = ma_0 \text{ et } \vec{N} = mg$$

Comme la caisse ne glisse pas, d'après les lois de Coulomb :

$$|\vec{T}| \leq f |\vec{N}|$$

$$a_0 \leq fg$$

IX.1.b Dans le référentiel lié au sol la caisse se déplace avec l'accélération a_0 donc :

$$v = a_0 t \text{ et } E_c = \frac{1}{2} m a_0^2 t^2$$

Cette énergie cinétique provient du travail de la force de frottement entre la caisse et le camion, en effet :

La distance parcourue durant t est $L = \frac{1}{2} a_0 t^2$. Le travail de la force de frottement est alors :

$$W = ma_0 \times \frac{1}{2} a_0 t^2 = E_c$$

IX.2 Dans le cas où la caisse glisse avec une vitesse selon $-\vec{u}_x$: En notant $\vec{a}_{c/c}$, l'accélération de la caisse par rapport au camion, la RFD s'écrit :

IX.2.a

$$-m\vec{a}_0 + \vec{T}\vec{u}_x + \vec{N}\vec{u}_z - mg\vec{u}_z = m\vec{a}_{c/c}$$

On en déduit : $\vec{N} = mg$ et comme le système glisse : $|\vec{T}| = fmg$

Comme la vitesse relative de glissement est vers l'arrière, la force de frottement est vers l'avant : $\vec{T} = fmg$.

On en déduit l'accélération de la caisse :

$$a_{c/c} = fg - a_0$$

La vitesse de la caisse dans le référentiel lié au camion est alors :

$$v = (fg - a_0)t \text{ comme le glissement se fait vers l'arrière : } fg < a_0$$

Ce qui est cohérent avec la question 1

IX.2.b La vitesse dans le référentiel absolu est donnée par :

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_{c/c}, \quad \vec{v}_e \text{ vitesse d'entraînement}$$

$$\vec{v}_e = a_0 t \vec{u}_x$$

$$v = a_0 t + fg t - a_0 t = fg t > 0$$

La caisse glisse vers l'arrière du camion mais avance par rapport à la route, ce qui semble cohérent. On a alors :

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = \vec{T} \cdot \vec{v} = f^2 m g^2 t > 0$$

La force de frottement apparaît alors comme motrice.

$$\mathcal{P}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{T} \cdot a_0 t \vec{u}_x = -f m g a_0 t < 0$$

La force de frottement exercée par la caisse sur le camion apparaît alors comme résistante. Si on fait le bilan des 2 :

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} + \mathcal{P}_{2 \rightarrow 1} = f m g (fg - a_0) < 0$$

Globalement les actions de frottement sont résistantes, résultat qui est général.

X. Mouvement sur un axe tournant ♪♪

X.1 Comme il y a une force d'inertie d'entraînement qui dépend de la position (distance à l'axe) et une force de rappel qui ne dépend aussi que de la position, on peut alors écrire que la somme des forces est nulle au point d'équilibre. Avec $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{OM} = m\omega^2 r \vec{u}_r$ et $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_r = -k(r - \ell_0) \vec{u}_r$. On pensera à introduire la pulsation propre du ressort ω_0 dans l'expression finale.

Ici les deux forces dérivant d'une énergie potentielle, on peut aussi écrire que la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à r est nulle :

$$E_p = \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + Cte$$

Dans les deux cas, on trouve :

$$r_{eq} = \frac{\omega_0^2 \ell_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

X.2 Cette fois-ci le mouvement est quelconque. Il ne faut pas oublier de prendre en compte la force de Coriolis et il suffit de voir que le mvt de la masse est radiale dans le référentiel tournant. Le mouvement est donc à un seul degré de liberté. La force de Coriolis ne travaille pas et la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = Cte$$

La dérivation de cette équation donne l'équation du mouvement :

$$\ddot{r} + (\omega_0^2 - \omega^2) r = r_{eq}$$

Tout dépend du signe du terme devant r . Si $\omega_0 > \omega$, la solution est sinusoïdale harmonique (le ressort est suffisamment raide pour contrebalancer la force d'inertie) :

$$r(t) = (2.r_0 - r_{eq}) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}t) + r_{eq}$$

À l'aide des conditions initiales : le ressort oscille autour de sa position d'équilibre.

Si $\omega_0 < \omega$, la solution est hyperbolique. Le ressort n'est pas assez raide pour s'opposer à la force d'inertie d'entraînement. Le ressort s'allonge se déforme et éventuellement casse. La solution donnée est valide tant que la loi de Hooke est vérifiée pour le ressort.

$$r(t) = \left(2.r_0 - \frac{\omega_0^2 r_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \text{ch}(\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}t) + \frac{r_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

X.3 En projetant le principe fondamental sur les axes d'un repère cylindrique :

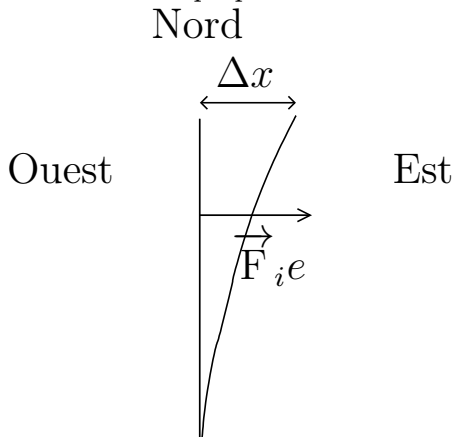
$$R_\theta = 2m\dot{r}\omega \text{ et } R_z = mg$$

$$R_\theta = -2m\omega(2r_0 - r_{eq})\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}t) \text{ dans le cas harmonique}$$

$$R_\theta = 2m \left(2.r_0 - \frac{\omega_0^2 r_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \omega \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} \text{sh}(\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}t) \text{ dans le cas hyperbolique}$$

XI. « Caramba encore raté ! » ♫♫

La seule force qui peut dévier la balle de sa trajectoire est la force de Coriolis.



On le supposera à une latitude moyenne λ . La balle est déviée vers l'Est. Dans cette direction, il n'y a aucune autre force (on supposera la force de traînée négligeable dans cette direction, la vitesse vers l'Est étant négligeable).

D'après le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre non galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

On ne s'occupe pas du premier terme qui n'a d'influence que selon la verticale. Le second terme est responsable d'une accélération vers l'Est de la masse m :

$$a_{Est} = 2\omega v \sin \lambda$$

En intégrant on obtient la déviation Δx (on suppose la vitesse constante sur le temps de vol) :

$$\Delta x = \omega v \sin \lambda t^2$$

Le temps de vol se calcule rapidement en supposant que le mouvement est essentiel sud-nord à vitesse constante :

$$t \approx \frac{d}{v}$$

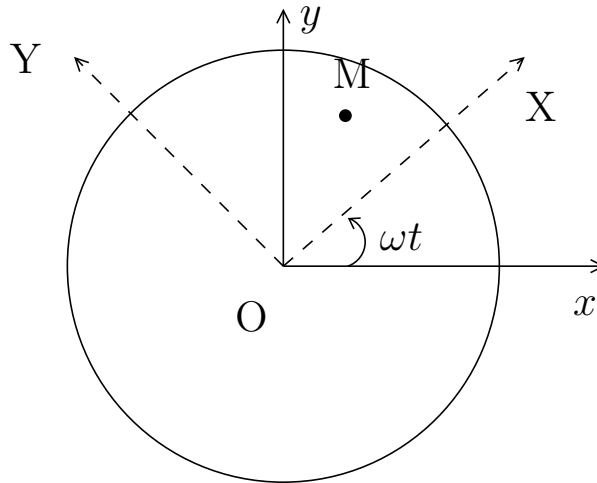
$$\Delta x = \omega \sin \lambda \frac{d^2}{v}$$

À la latitude de 45° , on trouve :

$$\Delta x = 5 \text{ mm}$$

Le décalage est faible à cette distance et ne doit pas gêner pour atteindre le centre de la cible à condition que son diamètre soit un peu plus grand que le centimètre.

XII. Point matériel sur un plateau tournant ♪♪



Référentiel : plateau non galiléen

Système : point matériel de masse m

Bilan des forces :

- Le poids $\vec{P}$
- La réaction du support $\vec{N}$ normale au support (pas de frottements)
- La force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{OM}$
- La force de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$

D'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} + m\omega^2 \vec{OM} = m\vec{a}$$

Soit en projection dans la base (OXYZ) :

$$\begin{cases} 2m\omega\dot{Y} + m\omega^2 X = m\ddot{X} \\ -2m\omega\dot{X} + m\omega^2 Y = m\ddot{Y} \end{cases}$$

En simplifiant par m et en multipliant par i la seconde :

$$\begin{cases} 2\omega\dot{Y} + \omega^2 X = \ddot{X} \\ -2\omega i\dot{X} + \omega^2 iY = \ddot{Y} \end{cases}$$

En additionnant les deux lignes :

$$2\omega(\dot{Y} - i\dot{X}) + \omega^2 \underline{u} = \ddot{u}$$

$$-2i\omega(\dot{X} + i\dot{Y}) + \omega^2 \underline{u} = \ddot{u}$$

$$\boxed{\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 \underline{u} = 0}$$

En remplaçant la solution exponentielle dans l'équation :

$$r^2 + 2i\omega r - \omega^2 = 0$$

$$\Delta = 0 \text{ racine double : } r = -i\omega \text{ d'où } \underline{u} = (At + B) \exp(-i\omega t)$$

Avec les conditions initiales : $u(0) = a$ et $\dot{u}(0) = 0$ (vitesse initiale nulle).

On en déduit :

$$B = a \text{ et } A = i\omega a$$

soit

$$u(t) = a(1 + i\omega t) \exp(-i\omega t)$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de u , on obtient bien les résultats demandés.

Dans le référentiel absolu, le point M n'est soumis qu'à son poids et la réaction normale. Initialement, la vitesse selon x est nulle mais la vitesse selon Oy vaut $\dot{y} = a\omega$ puisque le point repose sur le plateau en rotation autour de z .

Enfin $x = a$ et $y = 0$.

La relation fondamentale conduit simplement à :

$$\ddot{x} = 0 \text{ et } \ddot{y} = 0$$

Par intégration on en déduit :

$$x = a \text{ et } y = a\omega t$$

Il s'agit donc d'une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe y .

D'après le schéma :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{u_x} = \cos\omega t \overrightarrow{u_X} - \sin\omega t \overrightarrow{u_Y} \text{ par projection}$$

$$\overrightarrow{u_y} = \sin\omega t \overrightarrow{u_X} + \cos\omega t \overrightarrow{u_Y} \text{ par projection}$$

$$\overrightarrow{OM} = (x \cos\omega t + y \sin\omega t) \overrightarrow{u_X} + (y \cos\omega t - x \sin\omega t) \overrightarrow{u_Y}$$

On identifie et on reconnaît :

$$\begin{cases} X = x \cos\omega t + y \sin\omega t \\ Y = y \cos\omega t - x \sin\omega t \end{cases}$$

En remplaçant x et y par leur expression on retrouve bien le résultat précédent.

XIII. Superman et la rotation de la Terre, mines-ponts 2019 (Merci à Loïse Quéré) ♪♪

Calculons tout d'abord la champ de pesanteur :

XIII.1 À l'équateur la force d'inertie d'entraînement et la force de gravitation sont colinéaires. En considérant un axe Oz dirigé depuis le centre de la Terre vers la surface :

$$\overrightarrow{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \overrightarrow{u_z} + \omega^2 R_T \overrightarrow{u_z}$$

La force d'inertie étant nulle au pôle, le premier terme possède la même norme qu'au pôle :

$$\overrightarrow{g} = -g_{\text{pôle}} \overrightarrow{u_z} + \omega^2 R_T \overrightarrow{u_z}$$

A.N. :

$$g_{\text{équateur}} = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$$

XIII.2 On peut d'abord raisonner de cette façon : le poids de la perche qui est très grande s'exerce en $h/2$. Comme la force de gravitation et la force d'inertie sont opposées à l'équateur, si la perche est suffisamment grande les deux peuvent se compenser :

$$-\frac{GM_T}{(R_T + \frac{h}{2})^2} + \omega^2 \left(R_T + \frac{h}{2} \right) = 0$$

Soit :

$$h = 2 \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\omega^2}} - R_T$$

A.N. : $h = 3,58.10^7 \text{ m} = 35800 \text{ km}$

C'est une distance énorme, environ 10% de la distance Terre-Lune ! Le champ de force n'est plus homogène sur la perche. Vu la distance d'ailleurs, on ne peut pas parler de poids.

Il faut donc intégrer la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement sur toute la perche. La force subie par un élément de la perche compris entre r et $r + dr$ est :

$$d\vec{P} = \mu dr \left(-\frac{GM_T}{r^2} + r\omega^2 \right) \vec{u}_r$$

On intègre de R_T à $R_T + h$:

$$\vec{P} = \mu \left(\frac{\omega^2}{2} h(R_T + h) - \frac{GM_T}{R_T} \frac{h}{R_T + h} \right) \vec{u}_r$$

Le poids s'annule si :

$$h^2 + 3R_T h + 2R_T^2 - \frac{2GM_T}{R_T \omega^2} = 0$$

Dont la résolution donne : $h = 1,43.10^5 \text{ km}$ soit 37% de la distance Terre-Lune !

XIII.3 L'action de superman modifie la vitesse de rotation de la Terre. Donc la force d'inertie d'entraînement, c'est à dire le poids sera modifié. Avec la bonne vitesse de rotation, le poids peut être annulé à la bonne latitude (il n'est pas nécessaire de changer le sens de rotation, mais dans le film, changer le sens de rotation permettait à superman de remonter le temps afin de sauver Lois Lane avant qu'elle ne soit écrasée par les rochers).

La force d'inertie d'entraînement augmente quand on va vers l'équateur. Donc si elle annule le poids pour la latitude 36 nord, toute la population entre l'équateur et cette latitude est éjectée. Le reste de la population entre cette latitude et le pôle nord reste sur Terre mais avec un poids plus faible. La situation est symétrique pour l'hémisphère sud.

XIII.4 Écrivons le TMC pour le système Terre, on supposera l'altitude de superman négligeable. On suppose également qu'il vole dans le plan de l'équateur pour avoir le bras de levier le plus grand possible. On note ω_0 la vitesse de rotation de la Terre que l'on connaît ($\omega_0 = 7,29.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$).

D'après le TMC appliqué au solide Terre, on a donc :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \alpha v^2 R_T$$

En supposant que superman augmente la vitesse de la Terre en l'entraînant grâce aux frottements d'après l'analyse physique précédente.

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{\alpha v^2 R_T}{J} t$$

À 36° de latitude nord, le poids ne peut pas s'annuler (les deux forces ne sont pas colinéaires). Néanmoins la composante de la force d'inertie d'entraînement selon la verticale locale z peut compenser la force de gravitation (cf schéma du cours) :

$$F_{iez} = m\omega^2 R_T \cos^2(\lambda)$$

La composante verticale du poids s'annule quand :

$$m\omega^2 R_T \cos^2(\lambda) = \frac{GmM_T}{R_T^2} \text{ soit :}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3 \cos^2 \lambda}} = 1,5.10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$$

Ici on n'a qu'une équation et deux inconnues : le temps et la vitesse de superman. Plus superman va vite, plus la force qu'il exerce est grande, on se placera à la limite de superman non relativiste $v = c/10^1$. On supposera également que α est de l'ordre de l'unité.

1. On laisse aussi de côté les problèmes d'échauffement dus à la force de frottements

Quand on aura fait de la mécanique des fluides, on pourra faire mieux : la force de frottements fluide est de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\mu S C_x v^2$$

$\mu = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$ est la masse volumique de l'air, $S \approx 0,5 \text{ m}^2$, la section de superman dans une direction perpendiculaire à la vitesse, C_x le coefficient de traînée de l'ordre de 0,5. Donc α de l'ordre de 0,2.

Finalement :

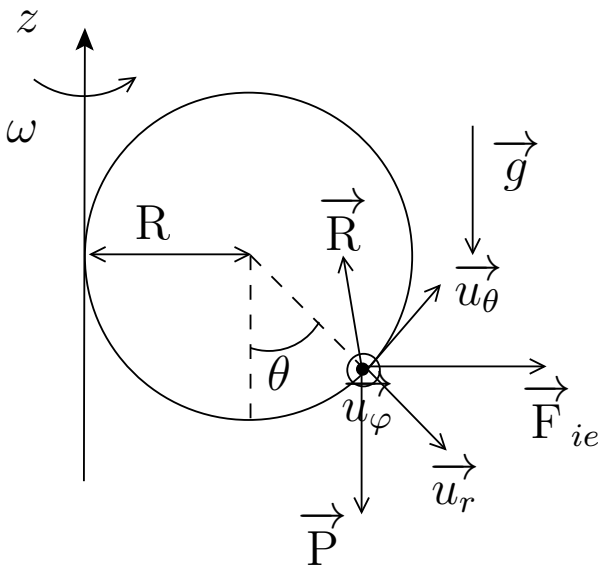
$$\Delta t = \frac{40(\omega_f - \omega_O)}{\alpha c^2} M_T R_T = 1,2 \cdot 10^{14} \text{ s}$$

Soit 3,9 millions d'année. L'inertie de la Terre est telle que même pour superman c'est mission impossible en essayant d'annuler le poids. On comprend maintenant pourquoi le scénario privilégie une remontée dans le temps !

XIV. Cerceau tournant 🎪🎪🎪

Bon exercice pour les projections.

Remarque : comme on souhaite obtenir l'équation du mouvement et la réaction de l'anneau, autant écrire la relation fondamentale de la dynamique qui permettra d'avoir les deux (à noter que la conservation de l'énergie permet d'avoir directement l'équation du mouvement) en une fois.



À noter que le vecteur $\vec{u}_\varphi$ pointe vers nous à cause du choix de l'orientation de θ . Ceci implique que $\omega = -\dot{\varphi}$

Référentiel : cercle tournant à ω

Système : point matériel de masse m

Bilan des forces :

Le poids $\vec{P} = m \vec{g}$

La force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$

La force de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$

La réaction du support qui a des composantes selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$\vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}$$

Il reste à projeter dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

$$\text{Avec : } \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ et } \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{HM} = (R + R\sin(\theta))\vec{u} = (R + R\sin(\theta))(\sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta)$$

$$\begin{aligned}
 -2m \times \begin{pmatrix} -\omega \cos \theta \\ \omega \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + m\omega^2 R(1 + \sin \theta) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ 0 \\ R_\varphi \end{pmatrix} &= m \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 -2m \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \cos \theta R\dot{\theta} \end{pmatrix} + m\omega^2 R(1 + \sin \theta) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ 0 \\ R_\varphi \end{pmatrix} &= m \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La projection selon $\vec{u}_\theta$ (direction de la vitesse) donne l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) - \omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta = 0$$

On remarquera que l'on retrouve le pendule simple pour $\omega = 0$ ce qui est cohérent. C'est une équation non linéaire que l'on ne peut résoudre que numériquement.

Les deux autres équations permettent de récupérer les composantes R_r et R_φ .

Soit :

$$R_r = -mg \cos \theta - m\omega^2 R(1 + \sin \theta) \sin \theta - mR\dot{\theta}^2$$

On remarque que pour θ petit et une vitesse angulaire positive, on a R_r négatif, ce qui est cohérent puisque l'on s'attend dans ce cas à une réaction radiale vers l'intérieur (qui empêche l'anneau d'être éjecté).

Et

$$R_\varphi = 2m\omega R\dot{\theta} \cos \theta \text{ qui s'oppose à la force de Coriolis.}$$

Pour θ petit à l'ordre 1, on obtient un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$$

Les positions d'équilibre vérifient : $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$. Avec E_p qui vaut :

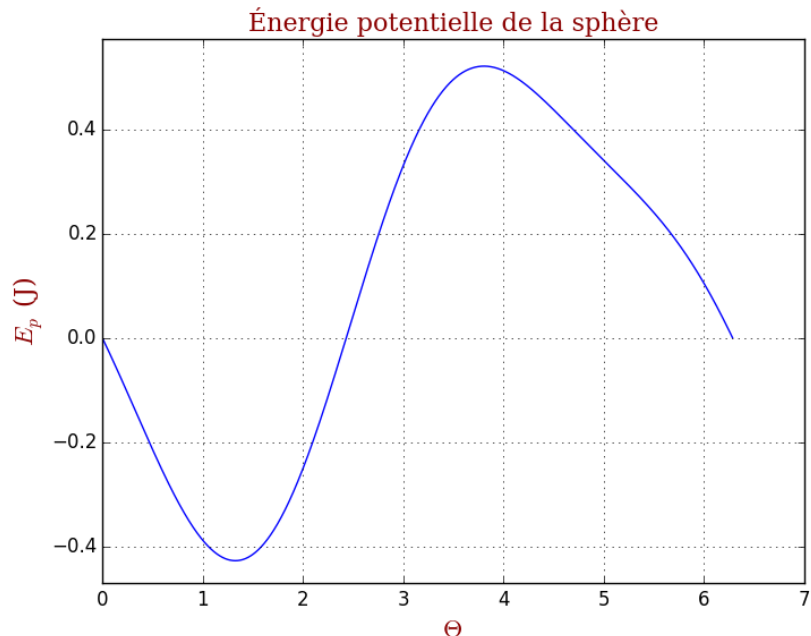
$$E_p = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2(1 + \sin \theta)^2 + Cte = mgR(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2(1 + \sin \theta)^2 + Cte$$

En choisissant l'énergie potentielle nulle en $\theta = 0$:

$$E_p = mgR(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2(1 + \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

En traçant E_p , on en déduit une position d'équilibre stable à 1,3 rad (75°) et une position d'équilibre instable à 3,8 rad (218°).

Il est cohérent que la position d'équilibre stable soit à quasiment 90° puisque c'est la position qui maximise la valeur de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement, le point est en deçà à cause de l'effet du poids qui tend à amener le mobile en 0.



XV. Limite de Roche 🎵🎵🎵

Exercice difficile. Il faut ici comprendre que la comète étant grande, sa cohésion est assurée par les forces de gravitation et non par les forces électromagnétiques (liaisons chimiques). Elle se rompt donc si les forces de marées sont supérieures ou égale à la force gravitationnelle exercée par l'ensemble de la comète sur un petit bout de celle-ci.

On étudie un petit bout de la comète dans le référentiel de la comète qui est non-galiléen (en translation circulaire).

Pour pouvoir faire cette étude, il faut déterminer la force d'entraînement donc l'accélération d'entraînement c'est à dire l'accélération de la comète.

Pour cela il faut donc étudier la comète dans le référentiel jupitérocentrique galiléen.

XV.1 Attention le référentiel cométocentrique est en translation. Il n'y a donc pas de force de Coriolis. On se place dans un cas simple où le centre de la comète C, le centre de Jupiter J et la petite masse (δm), notre système sont alignés. On considère que la masse est entre C et J.

Bilan :

- $\vec{F}_{ie} = -\delta m \vec{a}_e$, force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_J = \frac{-G\delta m M_J}{(d - R_C)^2} \vec{u}_r$, force exercée par Jupiter sur la petite masse (on prend la petite masse entre la comète et Jupiter).
- $\vec{F}_C = \frac{-G\delta m m_C}{R_C^2} \vec{u}_r$, force exercée par la comète sur la petite masse

Dans le référentiel cométocentrique, le principe fondamentale de la dynamique d'écrit :

$$-\delta m \vec{a}_e + \frac{-G\delta m M_J}{(d - R_C)^2} \vec{u}_r + \frac{-G\delta m m_C}{R_C^2} \vec{u}_r = \delta m \vec{a}(\delta m)$$

Déterminons l'accélération d'entraînement en étudiant la comète sur son orbite.

L'accélération d'entraînement est l'accélération du point coïncident, comme le référentiel cométocentrique est en translation, il s'agit aussi de l'accélération de C dans le référentiel jupitérocentrique galiléen.

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{Jup}(C) = -\frac{Gm_J}{d^2} \vec{u}_r$$

On en déduit :

$$\left(\frac{Gm_J}{d^2} - \frac{Gm_J}{(d - R_C)^2} \right) \vec{u}_r - \frac{Gm_C}{R_C^2} \vec{u}_r = \vec{a}(\delta m)$$

XV.2 Comme dans l'annexe du cours, on effectue un DL des deux premiers termes qui correspondent au terme de marées.

À la limite de la rupture de la comète, l'accélération de la petite masse est nulle et les deux termes se compensent.

$$\frac{2Gm_J}{d^3} R_C = \frac{Gm_C}{R_C^2}$$

$$d_{lim} = \sqrt[3]{\frac{2\mu_J}{\mu_C}} R_J$$

Application numérique :

$$d_{lim} = 94000 \text{ km}$$

