1-Rappels d'Analyse

Une connaissance précise des résultats du cours est essentielle pour pouvoir conduire des raisonnements mathématiques complexes. Ce chapitre est un rappel rapide de notions qui ont déjà été vues et qui doivent être maitrisées : ne pas hésiter à revenir vers le cours de première année pour plus de détails.

En premier lieu, les développements limités, les primitives usuelles et les formules de trigonométries doivent être bien connus.

A) Complexes et trigonométrie

1) Calculs dans l'ensemble des complexes

Formules de trigonométrie : à connaître ou/et à savoir retrouver rapidement.

Attention :

- En général, la partie réelle du produit n'est pas le produit des parties réelles : $\mathrm{Re}(i^2) \neq (\mathrm{Re}(i))^2$. C'est pareil pour les parties imaginaires.
- La notation $\sqrt{a}$ n'a de sens que pour $a \in \mathbb{R}_+$.
- Ne jamais utiliser d'inégalités sur les nombres complexes (par exemple, une suite de complexes ne peut pas être croissante ou décroissante).

Partie réelle ou imaginaire d'une somme et d'un produit par un réel : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z, z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Alors :

1) $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$
2) $\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(z_i)$ et $\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(z_i)$

Exponentielle complexe : soit $z = x + iy$ où x et y sont réels. On définit alors l'exponentielle complexe par : $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$ et $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$

Formules de Moivre et d'Euler. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

- $\left(e^{it}\right)^n = (\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt) = e^{int}$
- $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ et $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

Angle moitié : pour trouver l'expression trigonométrique d'une somme (ou d'une différence), on utilise souvent la méthode de « l'angle moitié ».

Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$, $e^{ia} + e^{ib} = e^{i(\frac{a+b}{2})}\left(e^{i(\frac{a-b}{2})} + e^{i(\frac{b-a}{2})}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i(\frac{a+b}{2})}$.

I**négalité triangulaire.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $z_1, z_2, ..., z_n, z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

1) $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$
2) $|z - z'| = |z + (-z')| \leq |z| + |z'|$
3) $|z - z'| \geq |z| - |z'|$ et $|z + z'| \geq |z| - |z'|$, donc $|z - z'| \geq ||z| - |z'||$

Binôme de Newton. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Linéariser et développer : soit *t* un réel.

- Pour linéariser $\cos^n(t)$, on peut écrire $\cos^n(t) = \frac{1}{2^n}\left(e^{it} + e^{-it}\right)^n$, puis développer avec la formule du binôme de Newton.
- Pour développer $\cos(nt)$ en fonction des puissances de $\cos(t)$, on peut écrire avec la formule de Moivre $\cos(nt) = \mathrm{Re}\left((\cos(t) + i\sin(t))^n\right)$, puis développer avec le binôme.

2) Racines d'une complexe non nul.

Définition : soit $Z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. *z* est une racine n-ème de *Z* si et seulement si $z^n = Z$.

Racines de l'unité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors 1 admet *n* racines n-èmes distinctes dans $\mathbb{C}$. Ce sont les $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$. On les appelle les racines n-èmes de l'unité.

Racines d'un complexe non nul : soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors *Z* admet *n* racines n-èmes distinctes dans $\mathbb{C}$. De plus, si une écriture trigonométrique de *Z* est donnée par $Z = re^{i\theta}$, les racines n-èmes de *Z* sont les $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} . e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, avec $0 \leq k \leq n-1$.

Equations du second degré : soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$. On considère l'équation (E) $az^2 + bz + c = 0$. On considère $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ et δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors :

- si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$, données par $x = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $y = \frac{-b+\delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution dans $\mathbb{C}$. C'est $x = \frac{-b}{2a}$

En particulier, (E) admet toujours deux solutions distinctes lorsque $\Delta \neq 0$.

B) Suites

1) Partie entière et borne supérieure

Partie entière : soit x un réel. Il existe un unique entier relatif p tel que $p \le x < p+1$. p est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.
On a ainsi $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 \le \lfloor x \rfloor \le x$.

Borné supérieure d'un ensemble : soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A est un ensemble non vide et majoré, A possède une borne supérieure, notée $\sup(A)$. C'est le plus petit des majorants de A.
- Si A n'est pas majorée, on note $\sup(A) = +\infty$
- Si $S = \sup(A)$, alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $\sup(A)$.

2) Limite d'une suite

Limite finie : on note $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a \in K$. . Soit (x_n) une suite d'éléments de K. $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, |x_n - a| \le \varepsilon$.
Ici, $|x_n - a|$ est un module lorsque $K = \mathbb{C}$.

Limite infinie : soit (x_n) une suite **réelle**. On dit qu'elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini si et seulement si $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, x_n \ge A$. On note alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$.
Une suite complexe ne peut pas tendre vers $+\infty$.

Suites extraites : soit (x_n) une suite. Une suite extraite (ou une sous-suite) de (x_n) est une suite de la forme $\left(x_{\varphi(n)}\right)$, où φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante.
Si $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (x_n) tend également vers a.
Ainsi, si deux suites extraites de (x_n) tendent vers des limites différentes, alors (x_n) n'a pas de limite.

Suites des termes pairs et impairs : soit (x_n) une suite. On suppose que (x_{2n}) et (x_{2n+1}) tendent vers une même limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$.

Passage des inégalités à la limite : soit $(U_n), (V_n)$ deux suites réelles. On suppose :

- $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, U_n \le V_n$
- $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$ et $V_n \underset{n \to +\infty}{\to} b$.

Alors $a \le b$.

Attention :

- On ne peut utiliser ce résultat que **si on sait que les limites existent**.
- Seules les inégalités larges passent à la limite, et pas les inégalités strictes.

Théorèmes de convergence : on dispose de trois théorèmes principaux. Le théorème de la limite monotone et celui sur les suites adjacentes donnent l'existence de la limite, mais pas sa valeur. Le théorème d'encadrement (des gendarmes) donne à la fois **l'existence et la valeur de la limite** (inutile donc de prouver par ailleurs que la suite converge).

Théorèmes d'encadrement (des gendarmes) : soit $(U_n), (V_n)$ (W_n) trois suites réelles.

- Si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left|U_n\right| \leq V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$, alors (U_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.
- Si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, V_n \leq U_n \leq W_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} W_n = l$, alors (U_n) converge vers l.
- Si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, V_n \leq U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Théorème de la limite monotone (*) : soit (x_n) une suite réelle.

- On suppose que (x_n) est croissante et majorée. Alors la suite (x_n) est convergente ; sa limite est $S = \sup\left\{x_n, n \in \mathbb{N}\right\}$.
  En particulier, pour une suite croissante qui tend vers S, on a $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq S$.
- On suppose que (x_n) est croissante et non convergente. Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

On a le même type de résultat pour une suite décroissante.

Suites adjacentes : Deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont adjacentes si et seulement si une des deux est croissante, l'autre décroissante et $a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

3) **<u>Suites récurrentes :</u>**

On note $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(U_n) \in K^{\mathbb{N}}$, une suite à valeurs dans K.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 : (U_n) est dite récurrente linéaire d'ordre 2 si et seulement si il existe deux éléments *a* et *b* de K tels que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$.

Expression explicite : Soit $a, b \in K$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
Soit $S = \left\{U \in K^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n\right\}$. Alors on étudie l'équation (C) : $x^2 = ax + b$.

- Si (C) admet deux solutions distinctes $\alpha, \beta \in K$, alors $S = \left\{U \in K^{\mathbb{N}}, \exists A, B \in K, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = A\alpha^n + B\beta^n\right\}$
- si (C) admet une unique solution $\alpha \in K$, alors $S = \left\{U \in K^{\mathbb{N}}, \exists A, B \in K, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = (A + Bn)\alpha^n\right\}$

Limites possibles d'une suite récurrente : on considère $U_0 = c \in D \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles. On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$. On suppose que tous les termes de la suite restent dans D, si bien que la suite (U_n) est bien définie. On suppose que f est **continue** en $a \in D$ et que (U_n) converge vers a. Alors $f(a) = a$ (les limites possibles sont les points fixes de f).

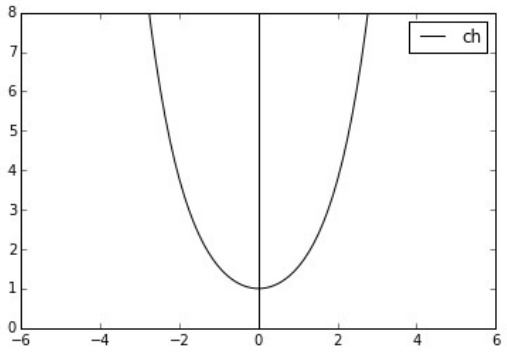
C) Fonctions usuelles

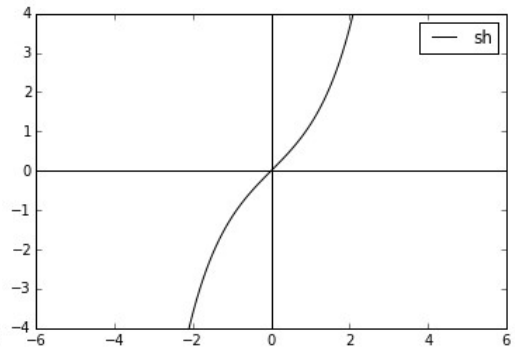
1) Les fonctions usuelles.

Fonctions hyperboliques : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec pour $x \in \mathbb{R}$ $ch'(x) = sh(x)$ et $sh'(x) = ch(x)$.

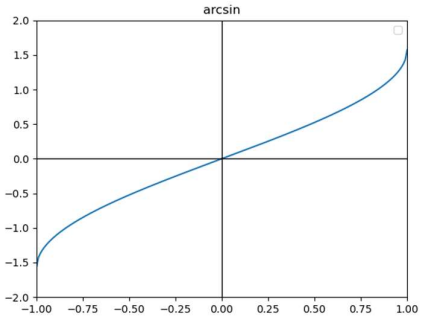
On a pour tout réel x : $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$





Fonction $Arc\sin$: $Arc\sin$ est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\forall x \in]-1,1[, \text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\forall x \in [-1,1], \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$ et $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$

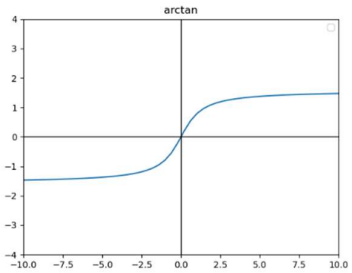


Fonction $Arc\tan$: $Arc\tan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

On a $\forall x\in\mathbb{R}, Arc\tan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x))=x$ et $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \text{Arctan}(\tan(x))=x$

$\forall x>0, Arc\tan(x)=\frac{\pi}{2}-Arc\tan(\frac{1}{x})$ **:** on peut ainsi se ramener en 0 pour une étude en $+\infty$

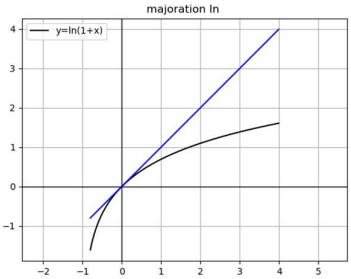


Attention :

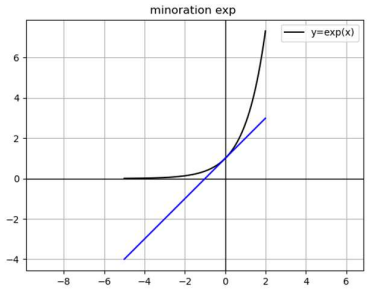
- On n'a pas toujours $\text{Arcsin}(\sin(x))=x$: $\text{Arcsin}(\sin(\pi))=0$.
- De même pour $\text{Arctan}(\tan(x))=x$: $\text{Arctan}(\tan(\pi))=0$.

2) <u>Des inégalités utiles à connaître.</u>

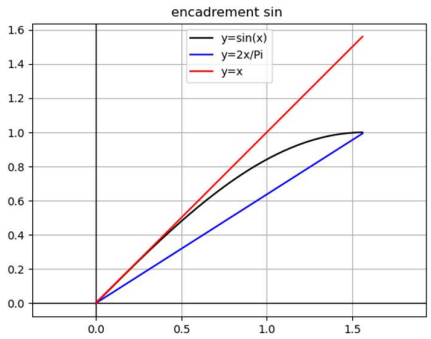
- $\forall x\in\left]-1,+\infty\right[, \ln(1+x)\le x$



- $\forall x\in\mathbb{R}, e^x\ge 1+x$.



- $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$



Ces inégalités se montrent bien en étudiant des fonctions ou en utilisant la concavité ou la convexité.

- $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$: une autre inégalité utile à connaître.

D) Quelques résultats importants sur les fonctions.

1) Limite et continuité.

Caractérisation séquentielle de la limite : soit a un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors $f(x) \underset{x \to a}{\to} b$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de I telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$, on a $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\to} b$.

Remarque : pour montrer $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$, il suffit donc de montrer que pour toute suite (x_n) qui tend vers $+\infty$, on a $f(x_n) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$

Continuité d'une fonction : On dit que f est continue en $a \in I$ si et seulement si elle admet une limite finie égale à $f(a)$ quand x tend vers a. Cette définition est équivalente à :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

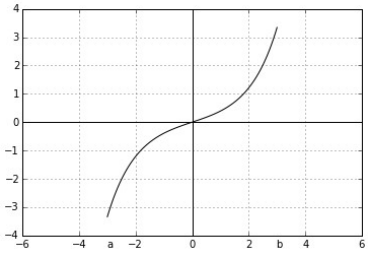
Théorème des valeurs intermédiaires : soit f une fonction **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$. Alors si t est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors **il existe** c compris entre a et b tel que $f(c) = t$. En particulier, lorsque $f(a).f(b) \leq 0$, f s'annule entre a et b.
Ce théorème donne l'existence et non l'unicité d'une solution.

Borne supérieure d'une fonction : soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est majorée, on note $\sup_{x \in I} f(x)$ ou $\sup_I f$ la borne supérieure de f : c'est le plus petit des majorants de f sur I. Si f admet un maximum global M sur I, on dit que la borne supérieure de f est atteinte et on a $\sup_{x \in I} f(x) = M = \max_{x \in I} f(x)$
De même pour la borne inférieure qui est le plus grand des minorants de la fonction lorsqu'elle est minorée.

Théorème de la limite monotone : soit f une fonction croissante sur un intervalle $]a,b[$ (a et b peuvent être infinis et vérifient $a < b$). Alors :

- Si f est croissante et majorée, f admet une limite finie quand x tend vers b. Cette limite est $\sup_I f$.
- Si f est croissante et minorée, f admet une limite finie quand x tend vers a . Cette limite est $\inf_I f$.

On a le même type de résultat pour une fonction décroissante.



Théorème des bornes atteintes : soient $a,b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et f une fonction continue sur le **segment** $[a,b]$. Alors f est bornée et admet un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$. Il existe ainsi $c,d \in [a,b]$ tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$. L'image de $[a,b]$ par f est alors $[m,M]$.

Attention : le théorème est faux si on n'est pas sur un segment. Par exemple, $Arc\tan$ n'atteint pas sa borne supérieure sur $\mathbb{R}$.

2) **Dérivation**

Point critique: Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, et $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a . Alors a est un point critique de f si et seulement si $f'(a) = 0$.

Conditions d'extremum : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $a \in I$ et que a est un point intérieur à I (c'est-à-dire que a n'est pas une extrémité de I). Alors :

1) Si f est dérivable en a et que f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$ (condition nécessaire pour avoir un extremum local).
2) Si f est de classe C^2 sur I et que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, alors f admet un extremum local en a (condition suffisante pour avoir un extremum local).

Dérivabilité et développement limité : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose f à valeurs réelles. Alors f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a (il existe des réels c,d et tels que lorsque $a+h \in I$, $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} c + d\,h + o(h)$).

Dans ce cas, on a $\begin{cases} c = f(a) \\ d = f'(a) \end{cases}$.

Dérivée de la réciproque : soit f une application C^∞, bijective d'un intervalle I sur $J = f(I)$. On suppose $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$. Alors f^{-1} est C^∞ sur $J = f(I)$ et on a $\forall x \in J, \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Théorème de Rolle : soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que f est à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis : soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que f est à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Inégalité des accroissements finis : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. On suppose $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, \left| f'(x) \right| \leq M$ Alors f est M-lipschitzienne sur I (ainsi $\forall x, y \in I, \left| f(x) - f(y) \right| \leq M \left| x - y \right|$).

Théorème de la limite de la dérivée. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que :

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
- $f'(x) \underset{x \to a}{\to} l \in \mathbb{R}$

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\to} l$. En particulier, f est dérivable en a et f' est continue en a.

Formule de Leibniz : soit $n \in \mathbb{N}^*$**.** Soient f et g deux fonctions n fois dérivables (respectivement C^n) sur I, alors $f\,g$ est n fois dérivable (respectivement C^n) sur I et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : Soit $n \in \mathbb{N}$; soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. Soit $a, b \in I$. On suppose qu'il existe $M_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M_{n+1}$. Alors $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$.

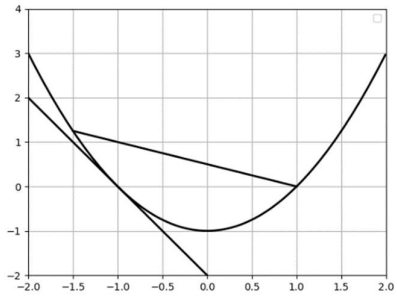
Fonctions convexes ou concaves :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles. On note C la courbe représentative de f.

- f est convexe sur I si et seulement si
  $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$

« l'image de la moyenne est plus petite que la moyenne des images »

- Si f est convexe, alors C est au-dessous de ses cordes (ou sécantes), qui sont les segments qui relient deux points de la courbe.
- Si f convexe et dérivable sur I. Alors C est au-dessus de ses tangentes :
  $\forall a, x \in I, f(x) \geq f(a) + (x-a) f'(a)$.
- Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe si et seulement si $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$



- f est concave sur I si et seulement si
  $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$
- On suppose que f est concave .Alors C est en dessus de ses sécantes
- Si f est dérivable sur I, et concave sur I, alors C est au-dessous de ses tangentes :
  $\forall a, x \in I, f(x) \leq f(a) + (x-a) f'(a)$.
- On suppose f deux fois dérivable sur I. Alors f est concave sur I si et seulement si
  $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$.

Méthode : pour montrer qu'une fonction deux fois dérivable est convexe (ou concave), on montre que sa dérivée seconde est positive (ou négative), et on en déduit des propriétés en utilisant la définition ou la position par rapport aux sécantes ou aux tangentes.

E) Analyse asymtotique

1) Comparaison des fonctions

Dans tout ce qui suit, a désigne un point d'un intervalle I ou une extrémité, éventuellement infinie, de cet intervalle.

f, g sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a. On suppose aussi que si $a \in I$ et $g(a) = 0$, alors $f(a) = 0$

Fonctions négligeable devant une autre : On dit que f est négligeable devant g en a si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$. Ceci équivaut à l'existence d'une fonction h définie au voisinage de a telle que :

- au voisinage de a, $f = g\,h$.
- $h(x) \underset{x\to a}{\to} 0$

On note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Croissance comparée :

- en $+\infty$:
  si $\alpha < \beta$, alors $x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{\beta})$
  $\forall \alpha,\beta > 0, x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$
  $\forall \alpha,\beta > 0, (\ln x)^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{\beta})$
- en 0 : si $\alpha < \beta$, alors $x^{\beta} \underset{x\to 0}{=} o(x^{\alpha})$
  $\forall \alpha,\beta > 0, |\ln(x)|^{\alpha} \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right)$

Somme : quand on a une somme de "o" , on garde celui qui contient la fonction la plus grande. Par exemple, $o(x)+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} o(x)$ et $o(x)+o(x^2) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)$

Fonction dominée par une autre : On dit que f est dominée par g si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.

Fonctions équivalentes en a : on suppose que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a. On suppose aussi que si $a \in I$, alors $g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$.
On a alors trois manières de traduire que f et g sont équivalentes en a :

- $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$
- Il existe une fonction h définie sur I telle que $h(x) \underset{x\to a}{\to} 1$ et $f = g\,h$ au voisinage de a.
- $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

Propriétés. Sous des hypothèses analogues,

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$
- On suppose $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors f et g ont même signe au voisinage de a.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\to} b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\to} b$

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R} - \{0\}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$

Opérations légales sur les équivalents : sous des hypothèses analogues,

- $(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)) \Rightarrow f\,h(x) \underset{x\to a}{\sim} g\,k(x)$ (on peut faire des produits)
- $(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{k(x)}$ (on peut faire des quotients)
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, si $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) > 0$ et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $\left(f(x)\right)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} \left(g(x)\right)^\alpha$ (en particulier, $\sqrt{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \sqrt{g(x)}$).
- Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $\left(f(x)\right)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} \left(g(x)\right)^\alpha$
  On peut donc prendre une puissance, mais **celle-ci ne doit pas dépendre de x.**

<u>Attention : ce qui suit est parfaitement illégal :</u>

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ n'a pas de sens. Si on obtient cela, il y a forcément une erreur.
- On ne peut pas, en général, faire de somme d'équivalents :
  $x^2 + 3x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $-x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2 + 1$ mais on n'a pas $x^2 + 3x - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 - x^2 + 1$.
- On ne peut pas, en général, composer fonction et équivalent :
  $x + 3 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ mais on n'a pas $\mathrm{e}^{x+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$

On peut en revanche ajouter les développements limités et les limites, ou les composer avec des fonctions.

Théorème d'encadrement sur les équivalents :
On suppose qu'au voisinage de a, on a $f(x) \le g(x) \le h(x)$ et que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

2) <u>Développements limités</u>

Dans ce qui suit, *a* est un point ou une extrémité réelle de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. f admet un développement limité à l'ordre n en a (un $DL_n(a)$) si et seulement si il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ et une fonction ε définie sur I tels que pour tout réel h tel que $a + h \in I$, on ait $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + h^n \varepsilon(h)$, avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.

On note aussi : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o\left(h^n\right)$, ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$.

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ est la partie régulière du développement limité.

DL d'une primitive. On suppose que $a \in I$ et que f admet un $DL_n(a)$. On suppose aussi que f admet une primitive F sur I. Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a. Si $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$, alors $F(a+h) \underset{h\to 0}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} h^{k+1} + o(h^{n+1})$.

Formule de Taylor-Young : Si f est de classe C^n sur I, et si $a \in I$, alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$, avec $h = x - a \underset{x\to a}{\to} 0$. On a aussi $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$.

Méthode : pour effectuer un développement limité lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}^*$, on a deux possibilités :

- Poser $x = a + h$. On a alors $h \underset{x\to a}{\to} 0$, et on fait un DL en 0 en la variable h.
- Utiliser la formule de Taylor-Young lorsque les dérivées sont faciles à calculer.

Unicité du développement limité.
On suppose que f admet deux développements limités en a donnés par $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$ et $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + o(h^n)$. Alors $\forall 0 \le i \le n, a_i = b_i$.

En particulier, si f est C^n sur I et que $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$, alors $\forall k \in [\![0,n]\!], a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

3) Comparaison de suites.

Suite dominée,négligeable : Soit $(x_n),(y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (y_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang N). Alors :

- $x_n \underset{n\to+\infty}{=} O(y_n)$ si et seulement si la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\ge N}$, est bornée.
- $x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(y_n)$ si et seulement si la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\ge N}$ tend vers 0 (ou encore il existe une suite (U_n) tendant vers 0 telle que pour tout $n \ge N$, on a $x_n = y_n U_n$).

Par exemple : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La hiérarchie : quand n tend vers $+\infty$: (« << » signifie « est négligeable devant »)
$\ln(n) << (\ln(n))^{100} << n^{0,01} << \sqrt{n} << n << n^2 << n^{100} << (1,001)^n << 100^n << n!$

Plus précisément, par croissance comparée, si $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$:

- $(\ln n)^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\beta})$
- $n^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{\beta n})$
- $n^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(a^{n})$ (car $a^{n} = e^{n\ln(a)}$ et $\ln(a) > 0$)
- $a^{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

Suites équivalentes : il y a trois manières principales équivalentes de traduire que deux suites sont équivalentes. Ainsi, soient (x_n) et (y_n) deux suites de réels non nuls à partir d'un certain rang N. Alors (x_n) et (y_n) sont équivalentes lorsque n tend vers l'infini si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$
- il existe une suite $(U_n)_{n\geq N}$ telle que $\forall n \geq N, x_n = U_n y_n$ et $U_n \to 1$.
- $x_n \underset{n\to+\infty}{=} y_n + o(y_n)$

Signe de deux suites équivalentes : soit (x_n) et (y_n) deux suites. On suppose que (x_n) et (y_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.. On suppose $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$. Alors elles ont **même signe** à partir d'un certain rang.

Equivalents usuels : soit (U_n) une suite de réels ne s'annulant pas pour n assez grand. On suppose qu'elle tend vers 0 quand *n* tend vers l'infini. Alors :

- $\ln(1+U_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} U_n$
- $e^{U_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} U_n$
- $\sin(U_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} U_n$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+U_n)^{\alpha} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha U_n$

Théorème d'encadrement pour les équivalents : soient $(U_n), (V_n)$ (W_n) trois suites. On suppose $V_n \sim W_n$ et $\exists N, \forall n \geq N, V_n \leq U_n \leq W_n$ **.** Alors $U_n \sim V_n$