

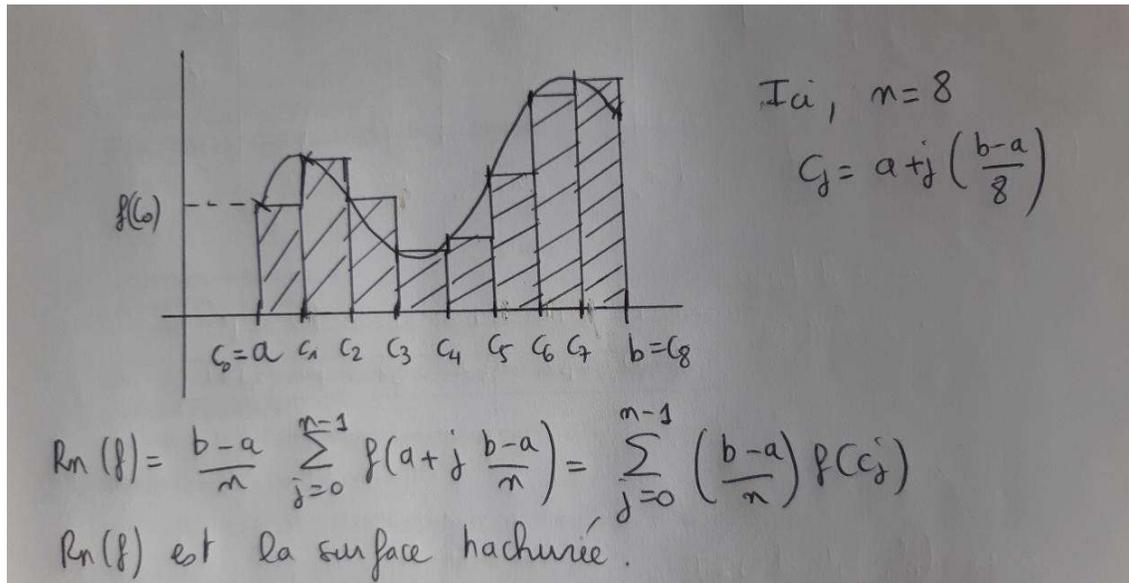
3-Intégrales et intégrales généralisées.

A) Brefs rappels sur l'intégrale des fonctions continues sur un segment.

Proposition (Sommes de Riemann) (*) : soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$

et $a \leq b$. Alors $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right) \rightarrow \int_a^b f(t) dt$

En particulier, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$ et $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$



Exemple 1 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k}$.

Exemple 2 : donner un équivalent simple de $U_n = \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k}{n}\right)$ quand n tend vers l'infini.

Proposition (*) : théorème fondamental. Soit f une fonction **continue** sur I à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $a \in I$. Alors :

- La fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur I . C'est la primitive de f qui s'annule en a . Sa dérivée est f . En particulier, f admet une primitive sur I .
- F est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Les autres primitives de f sont les $G = F + k$, où k est une constante.
- On a alors $\forall x, y \in I, G(y) - G(x) = \int_x^y f(t)dt$.

Exemple : on considère $g(x) = \int_{-x}^x \frac{1}{t+i} dt$.

- 1) Montrer que g est définie et dérivable sur \mathbb{R} et calculer g' .
- 2) Calculer directement g et retrouver le résultat précédent.

Proposition : soit f une fonction continue et de signe constant sur $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

En particulier, si f est une fonction continue, positive sur $[a, b]$ et qui n'est pas la fonction nulle, alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

B) Intégrale des fonctions continues par morceaux

Dans tout ce qui suit, on considère un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , avec $a < b$.

On note comme d'habitude $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1) Fonctions continues par morceaux

Définition : soit n un entier naturel non nul. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ de réels tels que $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$.

La subdivision $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ donnée par $c_j = a + j \frac{b-a}{n}$ est dite régulière.

Définition : Soit f définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans K . On dit qu'elle est continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $[a, b]$ telle que, pour $1 \leq j \leq n$:

- f est continue sur $]c_{j-1}, c_j[$.
- f possède une limite finie à droite en c_{j-1} et à gauche en c_j .

Une telle subdivision est dite adaptée à f .

Remarques :

- f est ainsi continue par morceaux lorsqu'elle est continue sauf en un nombre fini de points en lesquels elle a une limite finie à gauche et à droite.
- Si f est continue sur I , alors elle est continue par morceaux sur I

Exemples :

- f définie par $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $[0, 3]$.
- g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 3]$.

Propriété : soit f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$.

Preuve rapide : en prolongeant par continuité aux bords, avec des fonctions continues sur un segment.

Définition : soit I un intervalle quelconque de \mathbb{R} . Alors f est continue par morceaux sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I .

2) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition : Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs dans K . Soit $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , telle que pour $1 \leq i \leq n$, la restriction de f à $]c_{j-1}, c_j[$ se prolonge en une fonction f_i continue sur $[c_{j-1}, c_j]$.

On pose alors $\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_{c_{j-1}}^{c_j} f_j(t) dt$ (cette quantité ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie).

On pose aussi $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^a f(t) dt = 0$.

Remarque : avec cette définition, $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend pas des valeurs de f en c_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et ne dépend donc pas des valeurs de f en a et en b .

Dessin : on intègre ainsi sur chacun des morceaux et on ajoute les différents termes.

Dans la suite, on considère I un intervalle quelconque de \mathbb{R} .

Propriété : L'ensemble $M(I, K)$ des fonctions réelles continues par morceaux sur I est un espace vectoriel.

Preuve : non faite. On prend une subdivision adaptée à la fois à f et à g . C'est un sous-espace vectoriel de $F(I, K)$.

Proposition admise : Des propriétés vues en première année s'étendent aux fonctions continues par morceaux. En particulier, si $f, g \in M(I, K)$ et $a, b, c \in I$:

- Linéarité de l'intégrale: $\forall \lambda \in K, \int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
- Relation de Chasles : si $f \in M(I, K)$ et $a, b, c \in I$, alors $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.
- Positivité : si $K = \mathbb{R}$, $a \leq b$ et si $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$
- Croissance : si $K = \mathbb{R}$, $a \leq b$ et si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Attention : bien vérifier que les bornes sont dans le bon sens pour appliquer ces deux dernières propriétés.

Propriété (*) : Soit f continue par morceaux sur I à valeurs dans K . Soit $(a, b) \in I^2$ tels que

$a \leq b$. Alors $|f|$ est continue par morceaux sur I et $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Preuve : non faite. On sépare sur les différents morceaux et on somme après avoir majoré avec l'inégalité triangulaire

C) Intégrale généralisées.

Dans la suite, on considère I un intervalle quelconque de \mathbb{R} et $f, g \in M(I, K)$.

1) Convergence des intégrales en $+\infty$

Dans ce paragraphe, on suppose $I = [a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Définition (*) : On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si et seulement si

$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Lorsqu'elle existe, cette limite est notée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ou $\int_a^{+\infty} f$. On dit alors que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente en $+\infty$.

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente.

Remarques :

- Il y a deux réponses possibles à la question « quelle est la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$? ». Elle est convergente ou divergente
- Si $c > a$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature. La nature de l'intégrale ne dépend que de ce qui se passe au voisinage de $+\infty$.

Preuve : elles diffèrent d'une constante, donc une converge si et seulement si l'autre aussi.

Exemples : les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

- $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2} dt$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$

Remarque : il est possible que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge sans que l'on ait $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Prendre une bosse glissante avec des pics sur $\left[k, k + \frac{2}{2^k} \right]$.

Propriété : On suppose $\forall x \in I, 0 \leq f(x)$. Alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si et seulement si $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur I .

Preuve : elle est croissante donc elle converge si et seulement si elle est majorée.

Proposition (*) : On suppose $\forall x \in I, 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

- Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est également convergente et $0 \leq \int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt$.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ est divergente.

Preuve : Immédiat avec $\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt$ et la propriété qui précède.

Exemples : trouver la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2} dt$.

Remarque : comme la convergence ne dépend ici que de ce qui se passe au voisinage de $+\infty$, il suffit d'avoir $0 \leq f(x) \leq g(x)$ au voisinage de $+\infty$.

2) Extension à d'autres types d'intervalles.

Dans tout ce paragraphe, I un intervalle quelconque de \mathbb{R} et $f, g \in M(I, K)$.

Définition : on suppose ici $I = [a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b .

Lorsqu'elle existe, cette limite est notée $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f$. $\int_a^b f(t) dt$ est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente.

Exemples : trouver la nature de $\int_0^1 \frac{1}{1-t} dt$ et de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$

Définition : on suppose ici $I =]a, b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Alors on dit que l'intégrale impropre (on dit aussi généralisée) $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si $x \rightarrow \int_x^b f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers a . La limite est alors notée $\int_a^b f(t) dt$.
 $\int_a^b f(t) dt$ est alors convergente en a .

Exemples : quelle est la nature des intégrales suivantes ?

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$

2) $\int_0^1 \frac{1}{\tan(t)} dt$

3) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2 + 4} dt$.

Définition : on suppose ici $I =]a, b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et avec $a < b$.

Alors on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si il existe $c \in]a, b[$ tel

que les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ soient toutes les deux convergentes. On pose alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Remarques :

- Lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t) dt$ (resp. $\int_c^b f(t) dt$) converge, on dit que

$$\int_a^b f(t) dt \text{ est convergente en } a \text{ (resp. en } b).$$

- On a les mêmes types de définition pour divergente en a et en b .
- Le résultat ne dépend pas de la valeur de c choisie : si $d \in]a, b[$, $\int_d^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$

ont même nature, et de même pour $\int_a^d f(t) dt$ et $\int_a^c f(t) dt$.

- De plus, s'il y a convergence, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_a^d f(t) dt + \int_d^b f(t) dt$

(en effet, si $x < b$, avec Chasles, $\int_c^x f(t) dt = \int_c^d f(t) dt + \int_d^x f(t) dt$ donc en passant à la limite, $\int_c^b f(t) dt = \int_c^d f(t) dt + \int_d^b f(t) dt$).

Exemples : quelle est la nature des intégrales suivantes ? Calculer leur valeur en cas de convergence.

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t) dt$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+t^2} dt$
- $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Propriétés : On suppose ici $I = [a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose aussi $\forall x \in I, 0 \leq f(x)$. Alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur I . On a le même type de résultat sur $I =]a, b]$

Preuve : non faite. C'est pareil que pour $b = +\infty$.

Propriétés : On suppose ici $I = [a, b[$ $I =]a, b]$ ou $I =]a, b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$. On suppose aussi $\forall x \in I, 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

- Si $\int_a^b g(t) dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t) dt$ est également convergente et
$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$
- Si $\int_a^b f(t) dt$ est divergente, alors $\int_a^b g(t) dt$ est divergente.

Preuve : non faite.

Propriétés : on suppose ici que f est à valeurs réelles. On suppose aussi $a \leq b$ (les bornes sont dans le bons sens), avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

- Si $\forall t \in I, f(t) \geq 0$ et $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

- Si $\forall t \in I, f(t) \leq g(t)$ et que les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ (croissance de l'intégrale).

Preuve : non faite.

3) Propriétés des intégrales généralisées :

Proposition (linéarité). On suppose que $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont toutes les deux convergentes. Soit $\lambda, \mu \in K$.

Alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt$ converge et $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$

Preuve : non faite. On écrit la linéarité sur un segment et on passe à la limite.

Remarque : Attention ! On ne peut séparer l'intégrale en deux que si on sait que les intégrales convergent. Par exemple, on ne peut pas écrire $\int_1^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) - 1 \right) dt = \int_1^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt - \int_1^{+\infty} 1 dt$.

Remarques :

- Si $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b (f + g)(t) dt$ diverge (CV+DV=DV).
- Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ divergent, on ne peut rien dire de $\int_a^b (f + g)(t) dt$.

Propriété : si f est à valeurs complexes ($K = \mathbb{C}$), alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si

$\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ convergent.

On a alors $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$.

Preuve non faite : on traite le cas $I = [a, b[$ en prenant la limite.

Remarque (*, relation de Chasles) : On suppose que $f \in M(I, K)$ (où a et b sont les extrémités, éventuellement infinies de I) et que $\int_a^b f(t) dt$ converge

Soient $x, y, z \in I \cup \{a, b\}$, alors $\int_x^z f(t)dt = \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt$.

Exemple : $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \int_3^1 \frac{1}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$

Théorème de changement de variable de PCSI : soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit φ une fonction de classe C^1 sur J et à valeurs dans I . Alors si $\alpha, \beta \in J$, et $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, alors $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du = \int_a^b f(t)dt$.

Proposition : théorème de changement de variable. On suppose $I =]a, b[$ et f continue de I dans K . Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe C^1 . Alors $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ l'est aussi et dans ce cas $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du = \int_a^b f(t)dt$.

Preuve : non faite.

Elle utilise $\int_\lambda^x f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du = F(\varphi(x)) - F(\varphi(\lambda)) \rightarrow \lim_{y \rightarrow b} F(y) - F(\varphi(\lambda))$ avec une primitive F de f .

Remarque : Cela fonctionne aussi avec une bijection strictement décroissante et continue mais il faut faire attention à l'ordre des bornes : si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est strictement décroissante,

alors $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du = \int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Exemples (*) : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer $\int_0^1 t (\ln t)^n dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-2u} u^n du$

2) Montrer que $I = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente et est égale à $\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$

Proposition (*,rappel) : intégration par parties. Soient f et g des fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. On a alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Proposition : intégration par parties (*). Soient f et g des fonctions de classe C^1 sur I , un intervalle d'extrémités $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que fg admet des limites finies en a et en b .

Alors les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ ont même nature et lorsqu'elles convergent, on a l'égalité

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Preuve : on traite le cas $I = [a, b[$. On écrit l'IPP sur un segment et on passe à la limite.

Remarques :

- Il est indispensable de bien vérifier que le produit fg admet des limites finies en a et en b pour appliquer ce résultat.
- Lorsque f et g sont des fonctions usuelles, il n'est pas nécessaire de préciser que ces fonctions sont C^1 pour faire le calcul.

Exemple (*): Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}$ et établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

Avec une IPP, on trouve $I_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_n$.

D) Fonctions intégrables.

1) Absolue convergence et intégrabilité.

Dans la suite, on considère I un intervalle quelconque de \mathbb{R} d'extrémités $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$ et $f, g \in M(I, K)$.

Définitions (*):

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.
- Une fonction f est **intégrable** sur I lorsqu'elle est continue par morceaux sur I et que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.

On note alors $\int_a^b f(t) dt = \int_I f(t) dt = \int_I f$.

- Lorsque $I = [a, b[$, et que f est continue par morceaux sur I , on dit aussi que f est intégrable en b si et seulement si f est intégrable sur I .

De même en a lorsque $I =]a, b]$.

Proposition (*) : on suppose que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente. Alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente et $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Preuve : on traite le cas où $I = [a, b[$. Si f est à valeurs réelles. $0 \leq f^+ = \frac{f + |f|}{2} \leq |f|$ et $f^- = \frac{|f| - f}{2}$, avec $f = f^+ - f^-$ donc OK. Puis on a $0 \leq |\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$, donc $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$, est ACV donc CV et c'est bon. Enfin, $\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt$ pour $a < x < b$ et on passe à la limite.

Propriété : $L^1(I, K) = \{f \in M(I, K), f \text{ est intégrable sur } I\}$ est un sous espace vectoriel de $M(I, K)$. En particulier, si f, g sont intégrables sur I et $\lambda \in K$, $f + \lambda g$ est intégrable sur I .

Preuve : soit $f, g \in M(I, K)$, $\lambda \in K$. Alors $0 \leq |(\lambda f + g)(t)| \leq |\lambda| |f(t)| + |g(t)|$, donc $\lambda f + g$ est intégrable sur I .

Remarque : on suppose f continue sur $I = [a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f = \int_{]a,b]} f$. En effet, on prend une primitive F de f sur $I = [a, b]$ et $\int_{]a,b]} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} (F(b) - F(x))$.

Le résultat reste vrai si f est seulement continue par morceaux sur $I = [a, b]$, ou sur $I = [a, b[$.

(Explication à ne pas faire : Si $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée au

prolongement \tilde{f} de f en a , on prend $y \in]a, c_1[$. On a pour $x \in]a, y[$:

$$\int_x^b f(t) dt = \int_x^y \tilde{f}(t) dt + \int_y^b \tilde{f}(t) dt, \text{ avec } \int_x^y \tilde{f}(t) dt = F(y) - F(x) \rightarrow F(y) - F(a) = \int_a^y \tilde{f}(t) dt.$$

Propriété (*) : soit $f : I \rightarrow K$.

- Si f est intégrable, positive et continue sur I et $\int_I f(t) dt = 0$, alors $\forall t \in I, f(t) = 0$.
- Si f est positive, continue et intégrable sur I et que f n'est pas la fonction nulle, alors $\int_I f(t) dt > 0$

Preuve rapide : si $I = [a, b[$, pour la première seulement.

2) Exemples de référence

Propriété (*) : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $t \rightarrow e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Preuve : à faire.

Propriété (*) : $t \rightarrow \ln(t)$ est intégrable en 0^+ .

Preuve : expliquer.

Proposition (*) : Intégrales de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$ (ou encore $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$).
- $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ (ou encore $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$)

Preuve : à faire.

Exemples :

- Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$
- Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$

Corollaire : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. $t \rightarrow \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement si $\alpha < 1$

Preuve : on se place sur $I =]a, b]$. Le cas $I = [b, a[$ se traite de même.

On prend f continue par morceaux sur $I =]a, b]$ et on regarde la nature de $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ avec le théorème de changement de variable.

Propriété (*) :

- 1) On prend ici $I =]a, b]$ ou $I =]a, b[$. Alors f est intégrable en a si et seulement si $h \rightarrow f(a+h)$ est intégrable en 0^+ .
- 2) On prend $I = [a, b[$ ou $I = [a, b]$. Alors f est intégrable en b si et seulement si $h \rightarrow f(b-h)$ est intégrable en 0^+ .

Preuve : non faite ; toujours avec le théorème de changement de variable. On prend $c \in]a, b[$

et $\int_a^c |f(t)| dt$ et $\int_0^{c-a} |f(a+h)| dh$ ont même nature.

Exemples :

- Nature de $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$.
- Nature de $\int_1^2 \ln(t^2-1) dt$

3) Outils de comparaison.

Soient $f, g \in M(I, \mathbb{R})$.

Dans ce paragraphe, on suppose que $I = [a, b[$, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Les résultats restent vrais dans le cas d'un intervalle $I =]a, b]$

Proposition (*) : On suppose $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$. Alors g est intégrable en b si et seulement si f est intégrable en b .

Preuve : pour x proche de b , on a $\frac{1}{2} f(x) \leq g(x) \leq \frac{3}{2} f(x)$. D'où le résultat.

Exemples : nature de $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ (DV) et de $\int_1^{+\infty} \text{Arctan}(t) \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ (CV)

Proposition (*) : On suppose que :

- 1) $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$.
- 2) g est intégrable en b

Alors f est intégrable en b .

Corollaire (*) : On suppose que :

- 1) $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$.
- 2) g est intégrable en b

Alors f est intégrable en b .

Exemples : nature de $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ (CV) et de $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) e^{-t^2} dt$ (CV)

2) Méthodes pour étudier la nature d'une intégrale.

Méthode (*) : on s'intéresse à l'intégrabilité de f sur $I = [a, b]$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$ ou $I =]a, b[$ (qui entraîne la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$)

- 1) On commence par dire que f est continue (par morceaux) sur I .
- 2) Etude aux bornes
 - Si $I = [a, b]$, on n'a rien à faire.
 - Si $I =]a, b]$ on étudie l'intégrabilité en a et si $I = [a, b[$, on étudie en b .
 - Si $I =]a, b[$, on étudie l'intégrabilité en a et b . Au besoin, on prend $c \in]a, b[$ et on étudie $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$
- 3) On regarde le cas $I = [a, b[$. On peut :
 - Calculer l'intégrale si c'est possible (rare).
 - Utiliser que si $\forall t \in I, 0 \leq |f(t)| \leq g(t)$ et $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument, donc f est intégrable sur I .
 - Comparer avec une intégrale de référence :
 - Si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, g est intégrable en b **si et seulement si** f est intégrable en b .
 - Si $f(x) = O(g(x))$ ou $f(x) = o(g(x))$ et g est intégrable en b , **alors** f est intégrable en b .
 - En particulier, s'il existe $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +b} 0$, alors f est intégrable en b .
 - si $t f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $\int_I f$ diverge.

A expliquer si $t f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ avec $\frac{1}{t f(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
- 4) Faire une intégration par parties pour se ramener à une intégrale plus simple à étudier.
- 5) Faire un changement de variable.

Remarque : parfois, $\int_a^b f(t) dt$ est convergente mais il n'y a pas absolue convergence et f n'est

pas intégrable sur I . On dit alors que $\int_a^b f(t) dt$ est semi-convergente.

Exemples (*) :

- 1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente, mais pas absolument convergente (PV)
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

A faire en utilisant $\int_1^{2N\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt$ et que $|\sin|$ est π -périodique.

Remarque (*) : lorsque $I = [a, b[$ et que f est de signe fixe au voisinage de b , alors f est intégrable en b si et seulement si $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Exemples (*) : étudier la convergence des intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 2t}{2t^3 + 1} dt$ (DV)
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{e^x - 1} dx$ (CV)
- 3) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ (CV)
- 4) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-(i+1)x} dx$ (CV)
- 5) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} \ln(t)} dt$ (DV)
- 6) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos(x)}}$ (DV avec le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$)
- 7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^2 + 1} dt$ (intégrable donc CV en majorant)