2-Rappels et compléments d'algèbre linéaire

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A) <u>Polynômes</u>

Division euclidienne (*) : soit A et B deux éléments de $K[X]$. On suppose que B n'est pas le polynôme nul. Alors il existe un unique $(Q, R) \in K[X]^2$ tels que

- $A = BQ + R$
- $\deg(R) < \deg(B)$

Définition : l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est noté $K_n[X]$.

Racine : soit $a \in K$, et $P \in K[X]$. On dit que a est racine ou zéro de P si et seulement si $P(a) = 0$.

Trop de racines (*) :

1) Soit $P \in K[X]$. On suppose que P a une infinité de racines distinctes. Alors $P = 0$
2) Soit P un élément de $K_n[X]$. On suppose que P admet au moins $(n+1)$ racines distinctes. Alors P est le polynôme nul.

Racine d'ordre n (*) : soit $a \in K$, et $P \in K[X]$.

1) a est racine d'ordre (ou de multiplicité) k de P si et seulement si une des trois propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
   - P est divisible par $(X-a)^k$, mais pas par $(X-a)^{k+1}$.
   - Il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)^k Q$, avec $Q(a) \neq 0$.
   - $\forall i \in [\![0, k-1]\!], P^{(i)}(a) = 0, P^{(k)}(a) \neq 0$
2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a est une racine d'ordre n de P dans $\mathbb{C}$. Alors $\overline{a}$ est aussi racine d'ordre n de P dans $\mathbb{C}$.
3) a est racine d'ordre au moins k de P si et seulement si P est divisible par $(X-a)^k$, ce qui équivaut à $\forall i \in [\![0, k-1]\!], P^{(i)}(a) = 0$.

Racine multiple (*) : soit $a \in K$, et $P \in K[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a est racine **multiple** de P si et seulement si elle est de multiplicité supérieure ou égale à 2. Elle est **simple** si elle est de multiplicité égale à 1.
2) a est racine multiple de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.
3) On suppose que $mult(a, P) = n$ (a est racine de multiplicité n de P). Alors $mult(a, P') = n - 1$.

Exemple : trouver les valeurs de $b \in \mathbb{C}$ telles que $P = X^3 + 3X + b$ admet une racine multiple.

Racines distinctes : soit $P \in K[X]$. Soit $x_1, ..., x_k$, racines de *P*, deux à deux distinctes, de multiplicités respectives au moins égales à $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Alors $\exists Q \in K[X], P = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\alpha_i} Q$.

Polynôme scindé (*) : soit $P \in K[X]$. On dit que *P* est **scindé** si et seulement s'il est constant ou qu'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1, c'est-à-dire sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\alpha_i}$, où $k \in \mathbb{N}^*$, $x_1, .., x_k$ sont les racines de *P*, deux à deux distinctes, de multiplicités respectives égales à $\alpha_1, ..., \alpha_k$.

On peut aussi écrire $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)$ sans supposer que $x_1, .., x_k$ sont deux à deux distinctes.

$X^2 + 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Théorème de D'Alembert-Gauss : Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ (*) : soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors :

- *P* est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
- Si $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$, P admet exactement n racines comptées avec leur multiplicité.

Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ (*) : soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. On note $x_1,..,x_k$ les racines réelles de *P*, deux à deux distinctes, de multiplicités respectives égales à $\alpha_1, ..., \alpha_k$.
Alors :

- P admet au plus n racines réelles comptées avec leur multiplicité ($\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq n$),
- P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si P possède n racines réelles comptées avec leur multiplicité ($\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$)
- Si on trouve n racines distinctes de P, alors ce sont les seules et elles sont toutes simples.
- P possède au total n racines complexes comptées avec leur multiplicité, dont un nombre pair de racines complexes non réelles. Si on note $y_1, ..., y_q$ les racines complexes non réelles de P, de multiplicités respectives $\beta_1, ..., \beta_q \in \mathbb{N}^*$ regroupées chacune avec leur conjugué, il vient $P = \lambda (X - x_1)^{\alpha_1} ... (X - x_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^{p} \left((X - y_j)(X - \overline{y_j}) \right)^{\beta_j}$ où λ est le coefficient dominant du polynôme.

Relation entre les coefficients et les racines : soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme scindé de degré $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = a_n (X - x_1) ... (X - x_n)$, avec $x_1, ..., x_n \in K$, non nécessairement distinctes. Alors $\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Pour le retrouver :

Décomposition en éléments simples : soient $P,Q \in K[X]$. On suppose que $\deg(Q) \geq 1$, que $\deg(P) < \deg(Q)$ et que Q est scindé à racines simples : il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, ..., x_k \in K$ deux à deux distincts (qui sont les racines de Q), et $\lambda \in K^*$ (coefficient dominant de Q) tels que $Q = \lambda(X - x_1)...(X - x_k)$.

Alors il existe $a_1, ..., a_k \in K$ tels que $\forall x \in K \setminus \{x_1, ..., x_k\}, \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{a_i}{(x - x_i)}$.

Cette décomposition est unique, C'est la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$.

Remarque : soit $P,Q \in \mathbb{C}[X]$. Pour faire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$ si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on commence par faire la division euclidienne de P par Q.

Exemple (*) : décomposer en éléments simples $F(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+3)(x-2)}$

B) Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans la suite, $(E,+,.)$ est un $K-$espace vectoriel.

1) Familles d'un espace vectoriel, dimension.

Sous-espace vectoriel : Soit $F \subset E$. F est un espace vectoriel de E si et seulement si :

- $0_E \in F$
- $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in K, x+\lambda.y \in F$

Alors $\forall (x_1,x_2,..,x_p) \in F^p, \forall (\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_p) \in K^p, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \in F$ (F est stable par combinaisons linéaires).

Intersection et réunion : en général, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E, alors que $F \cap G$ en est un.

Combinaison linéaire : soit $(x_1,x_2,..,x_p) \in E^p$. Soit $x \in E$. x est combinaison linéaire (CL) des vecteurs $(x_1,x_2,..,x_p)$ si et seulement si il existe $(\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_p) \in K^p$, tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

Espace vectoriel engendré (*) : Soit $(x_1,x_2,..,x_p) \in E^p$. $Vect\left(\{x_1,x_2,....,x_p\}\right)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1,x_2,...,x_p$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $x_1,x_2,...,x_p$.

Familles (*) : Une famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$ d'éléments de E est :

- **génératrice** de E lorsque $Vect\left(\left\{x_1, x_2, ..., x_p\right\}\right) = E$ (ce qui signifie que tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des $(x_i)_{1\leq i\leq p}$).
- **libre** si et seulement si $\forall(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0)$
- **liée** si et seulement si elle n'est pas libre (c'est-dire qu'un des vecteurs est CL des autres). Cela signifie qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n$, non tous nuls, tels que $\lambda_1\, x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E$.
- une **base** de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Polynômes de degrés distincts (*) **:** soit $\left(P_0, P_1, ..., P_n\right)$ une famille de polynômes non nuls de degrés distincts. Alors la famille $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ est libre.

Quelques propriétés :

- Une famille contenant le vecteur nul est nécessairement liée.
- Une famille (u, v) de deux vecteurs est liée si et seulement s'ils sont colinéaires. Si $u \neq 0_E$ et que (u, v) est liée, alors $\exists \lambda \in K, v = \lambda u$.
- Une famille de trois vecteurs (u, v, w) est liée lorsque les trois vecteurs sont coplanaires. Il se peut qu'elle ne contienne pas deux vecteurs colinéaires.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre ; une surfamille d'une famille liée est liée.

Vecteur ajouté à une famille libre : soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Soit x un vecteur de E. On suppose que $(x_1, x_2, ..., x_n, x)$ est liée. Alors x est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Dimension finie :

- Un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement s'il contient une famille génératrice finie. Lorsque ce n'est pas le cas, on dit qu'il est de dimension infinie.
- Dans un espace vectoriel non nul de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de l'espace vectoriel et est noté $\dim(E)$. Par convention, si $E=\{0_E\}$, alors $\dim(E)=0$

Base extraite et base incomplète (*) On suppose $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.

- Base extraite : de toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base de E.
- Base incomplète : toute famille libre d'éléments de E peut être complétée en une base de E (les vecteurs qu'on rajoute peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E choisie au départ).

Familles libres, génératrices et dimension (*) : on suppose $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.

- Toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs et toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.
- Toute famille libre de E contient au plus n vecteurs et toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.

Bases des espaces usuels (*) : soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\dim\left(K_n[X]\right) = n+1$. La base canonique de $K_n[X]$ est $B=(1,X,..,X^n)$.
- $\dim\left(K^n\right)=n$. La base canonique de K^n est $B=(e_1,e_2,...,e_n)$ (si on note $\delta_{i,j}=1$ si $i=j$ et $\delta_{i,j}=0$ si $i \neq j$, alors on a $\forall i,j \in [\![1,n]\!], (e_i)_j = \delta_{i,j}$.
- Pour $n,p \in \mathbb{N}^*$, $\dim\left(M_{n,p}(K)\right) = n\,p$. La base canonique de $M_{n,p}(K)$ est $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$, avec $\forall i,k \in [\![1,n]\!], \forall j,l \in [\![1,p]\!] (E_{i,j})_{kl} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$ (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1).

Sous-espace vectoriel en dimension finie : soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $dim(F) \le dim(E)$.

2) <u>Produit et somme de sous-espaces vectoriels</u>

Définition : soit F,G des $K-$espaces vectoriels. On note $F\times G=\{(f,g), f\in F, g\in G\}$. C'est le produit cartésien des deux sous-espaces vectoriels.
Plus généralement, si $E_1,E_2,...,E_p$ sont des $K-$espaces vectoriels, alors on pose :

$$E_1\times E_2\times...\times E_p=\prod_{i=1}^{p}E_i=\{(e_1,e_2,...,e_p), \forall i\in [\![1,p]\!], e_i\in E_i\}.$$

Propriété : soit $E_1,E_2,...,E_p$ sont des $K-$espaces vectoriels. On munit $\prod_{i=1}^{p}E_i$ des lois suivantes : pour $e=(e_1,e_2,...,e_p), f=(f_1,f_2,...,f_p)\in\prod_{i=1}^{p}E_i$, pour $\lambda\in K$:

- $e+f=(e_1+f_1,e_2+f_2,...,e_p+f_p)$
- $\lambda.e=(\lambda e_1,\lambda e_2,...,\lambda e_p)$

Alors $\left(\prod_{i=1}^{p}E_i,+,.\right)$ est un $K-$espace vectoriel.

Preuve non faite : se montre avec la définition.

Propriété : soit F,G des $K-$espaces vectoriels de dimension finie. Alors $F\times G$ est de dimension finie et $\dim(F\times G)=\dim(F)+\dim(G)$
Plus généralement, si $E_1,E_2,...,E_p$ sont des $K-$espaces vectoriels de dimension finie, alors $\prod_{i=1}^{p}E_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\prod_{i=1}^{p}E_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\dim(E_i)$.

Preuve rapide dans le cas de deux espaces :

Définition : soient $F_1, F_2, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.

- On définit $F_1 + F_2 + ... + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i$ par :

$\forall x \in E, x \in \sum_{i=1}^{p} F_i \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, .., x_p) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p, x = x_1 + x_2 + .. + x_p$

- En particulier, $F_1 + F_2 = \{x \in E, \exists x_1 \in F_1, \exists x_2 \in F_2, x = x_1 + x_2\}$.

Définition (*) : soit $F_1, F_2, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que $F_1, F_2, ..., F_p$ sont en somme directe si et seulement si :
$\forall (x_1, x_2, .., x_p) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p, \left(x_1 + x_2 + .. + x_p = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = .. = x_p = 0_E \right)$

On note alors $F_1 \oplus F_2 + ... \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Propriété : soient $F_1, F_2, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. $F_1, F_2, ..., F_p$ sont en somme directe si et seulement si $\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i, \exists ! (x_1, x_2, .., x_p) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p, x = x_1 + x_2 + .. + x_p$. ($x$ se décompose de manière unique comme somme d'éléments de $F_1, F_2, ..., F_p$)

Preuve :

Exemple : on prend $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Pour $1 \leq i \leq 3$, on note $F_i = Vect\left(\left\{e_i\right\}\right)$. Alors $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = \mathbb{R}^3$.

Cas particulier de deux sous-espaces vectoriels : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \left\{0_E\right\}$.

Remarque : attention, cette propriété ne fonctionne que **si on a deux sous-espaces vectoriels** : (si (e_1, e_2) est la base canonique du plan, considérer $F_1 = Vect\left(\left\{e_1\right\}\right)$, $F_2 = Vect\left(\left\{e_2\right\}\right)$ et $F_3 = Vect\left(\left\{e_1 + e_2\right\}\right)$).

Sous-espaces vectoriels supplémentaires : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E, un K espace vectoriel de **dimension quelconque**.

F_1 et F_2 sont supplémentaires si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $F_1 \oplus F_2 = E$
- $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
- $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2$

A méditer (*) :

- Bien comprendre qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire en général. On doit donc dire « un supplémentaire » et non « le supplémentaire »
- On suppose $F_1 \oplus F_2 = E$ et $x \in E$ tel que $x \notin F_1$. En général, on n'a pas $x \in F_2$.

Supplémentaires en dimension finie (*) : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E, un K espace vectoriel de **dimension finie.**

F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \\ \dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(E) \end{cases}$.
- En réunissant une base de F_1 et une base de F_2, on obtient une base de E.

Base adaptée à un sous-espace vectoriel (*) : soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E, supposé non nul.

Une base adaptée à F est une base de E obtenue en prenant une base de F et en la complétant en une base de E.

Proposition (*) : soient $F_1, F_2, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E, un K espace vectoriel.
On suppose que pour $1 \leq i \leq p$, B_i est une base de F_i.
On note B la famille de vecteurs obtenue en juxtaposant (on dit aussi en concaténant) les vecteurs des bases $B_1, B_2, ..., B_p$.

Si $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$, alors B est une base de E, **adaptée** à la décomposition $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$.

Réciproquement, si B est une base de E, alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$.

En particulier, $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Preuve : à faire pour $p = 3$. C'est le même principe avec plus d'indices pour p quelconque.

Remarque : en particulier, si B est une base de E que l'on fractionne en une partition $B=(B_1,B_2,...,B_p)$, alors $\bigoplus_{i=1}^{p} Vect\left(B_i\right)=E$ (en prenant $F_i=Vect\left(B_i\right)$).

Formule de Grassman (*) : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E supposé de dimension finie. Alors $\dim(F_1+F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2)-\dim(F_1\cap F_2)$

Proposition : soit $F_1,F_2,...,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\dim\left(F_1+F_2+...+F_p\right)\leq\sum_{i=1}^{p}\dim\left(F_i\right)$.

De plus, $\dim\left(F_1+F_2+...+F_p\right)=\sum_{i=1}^{p}\dim\left(F_i\right)$ si et seulement si $F_1,F_2,...,F_p$ sont en somme directe.

Preuve : pour $1\leq i\leq p$, on note B_i est une base de F_i et $B=(B_1,B_2,..,B_p)$ la famille obtenue en juxtaposant les bases de $F_1,F_2,...,F_p$. On pose $F=F_1+F_2+...+F_p$.

3) <u>Applications linéaires</u>

Définition (*) : soient E et F deux K-espaces vectoriels, et f une application de E dans F. On dit que f est linéaire lorsque $\forall \lambda \in K, \forall (x,y) \in E^2, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $L(E,F)$.

On a alors $\forall (x_1, x_2, .., x_p) \in E^p, \forall (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in K^p, f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$.

Définitions (*) : soient E et F deux K-espaces vectoriels.

- Si $f \in L(E,F)$, f est un isomorphisme si et seulement si f est bijective.
- E et F sont isomorphes si et seulement si il existe $f \in L(E,F)$, bijective.
- Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Un automorphisme de E est un endomorphisme de E bijectif. On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Endomorphisme nilpotent (*) :
Soit $f \in L(E)$. On pose $f^0 = Id_E, f^1 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f$. Un endomorphisme est dit **nilpotent** si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*, f^n = 0_{L(E)}$

Exemple : E désigne l'espace $\mathbb{R}^3$ et on prend $f(x,y,z) = (y,z,0)$.

Noyau et Image (*) : soit $f \in L(E,F)$. Alors :

- $\operatorname{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\}$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de f et noté $\operatorname{Im}(f)$.
- $f \in L(E,F)$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.
- Le noyau de f est $Ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.
- f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.

Remarque (*) : soit E,F,G trois K-espaces vectoriels. Soit $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$. Alors $g \circ f = 0_{L(E,G)} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) \subset Ker(g)$.

Preuve :

Projection et Symétrie (*) On suppose $A \oplus B = E$. Ainsi si $x \in E$, $\exists!(a,b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$.

- On appelle projection (ou projecteur) sur A parallèlement à B l'endomorphisme p de E défini par $p(x) = a$.
- La symétrie par rapport à A parallèlement à B est définie par $s(x) = a - b$.

Dessin :

Propriétés (*) : On suppose $A \oplus B = E$. Soit p la projection sur A parallèlement à B et s la symétrie par rapport à A parallèlement à B. Alors :

- $p \circ p = p$.
- $\operatorname{Im}(p) = A = \{ x \in E, p(x) = x\} = Ker(p - Id_E)$ et $Ker(p) = B$.
- p est ainsi la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.
- $s \in GL(E)$, $s \circ s = Id_E$, $s^{-1} = s$ et $s = 2p - Id_E$.

Proposition (*) : soit $p \in L(E)$. Si $p \circ p = p$, alors $E = Ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$. De plus, p est la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

Preuve :

Proposition (*) : soit $s \in L(E)$. Si $s \circ s = Id_E$, alors $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$. De plus, s est la symétrie par rapport à $Ker(s - Id_E)$ parallèlement à $Ker(s + Id_E)$.

Preuve non faite : c'est le même type de preuve.

Image d'une base par une application linéaire : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E dans F. Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E. Alors :

- $(f(e_j))_{1 \le j \le p}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
- f est injective si et seulement si $(f(e_j))_{1 \le j \le p}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si $(f(e_j))_{1 \le j \le p}$ est une famille génératrice de F.
- f est bijective si et seulement si $(f(e_j))_{1 \le j \le p}$ est une base de F.

Proposition (*) : soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n, et $f \in L(E, F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective

En particulier, soit $f \in L(E)$. Alors si f est injective, f est un automorphisme de E.

Rang : soient E, F deux espaces vectoriels.

- Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille d'éléments de E. Le rang de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est $rg(x_1, x_2, ..., x_n) = \dim\left(Vect(x_1, x_2, ..., x_n)\right)$
- Soit $f \in L(E, F)$. On suppose $\dim(E) < +\infty$ et que $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de E, alors le rang de f est $rg(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = \dim\left(Vect(\left\{f(e_1), ..., f(e_p)\right\})\right) \le \dim(E)$

Théorème du rang (*) : soit E et F deux $K-$espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$. On suppose E de dimension finie. Alors $\dim(E) = rg(f) + \dim(Ker(f))$.

Rang d'une composée : soit $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$. On suppose E, F, G de dimension finie. Alors :

- $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$.
- si g est bijective, $rg(g \text{ o } f) = rg(f)$
- si f est bijective, $rg(g \text{ o } f) = rg(g)$

Détermination d'une application linéaire : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie

- Soit $B = (e_1, e_2, \ldots\ldots, e_p)$ une base de E et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire φ de E dans F telle que $\forall j \in [\![1, p]\!], \varphi(e_j) = f_j$ (une application linéaire est totalement déterminée par l'image des vecteurs d'une base).
- On suppose $E = E_1 \oplus E_2$ .Soit $u \in L(E_1, F)$ et $v \in L(E_2, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $f \in L(E,F)$ telle que $\begin{cases} f_{/E_1} = u \\ f_{/E_2} = v \end{cases}$. Une application linéaire est donc entièrement déterminée par ses restrictions à deux supplémentaires.

Formes linéaires et hyperplans :

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $H \subset E$.

- Une forme linéaire est une application linéaire de E dans K.
- H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n-1$.
- Soit u une forme linéaire non nulle sur E. Alors $Ker(u)$ est un hyperplan.
- Soit H un hyperplan de E. Soit D une droite vectorielle qui n'est pas incluse dans H. Alors $E = H \oplus D$.

C) Matrices et applications linéaires

Dans tout ce qui suit, K est l'ensemble des réels ou des complexes. n et p sont deux entiers naturels non nuls. E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.
On prend $B=(e_1,e_2,.....,e_p)$ une base de E et $C=(f_1,f_2,...,f_n)$ une base de F.

1) Matrice d'une application linéaire.

Matrice d'un vecteur : Soit $x \in E$. On suppose que $x = x_1 e_1 + ... + x_p e_p$, c'est-à-dire que $(x_1,x_2,...,x_p) \in K^p$ sont les coordonnées de x dans B. Alors la matrice de x dans la base B est $X = M_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(K)$.

Matrice d'une application linéaire (*) : Soit $g \in L(E,F)$. La matrice $A = M_{B,C}(g) \in M_{n,p}(K)$ de g dans les bases B et C est obtenue en reportant dans la j-ème colonne les coordonnées du vecteur $g(e_j)$ dans la base C : $\forall\, j \in [\![1,p]\!], g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} f_i$.

Si $g \in L(E)$, on note $M_B(g) = M_{B,B}(g)$
Le nombre de colonnes de la matrice est ainsi égal à la dimension de l'espace de départ, et le nombre de lignes à celle de l'espace d'arrivée.

Produit matriciel (*) : soit $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$ et $X \in M_{p,1}(K)$. Alors :

- $AB \in M_{n,q}(K)$ et pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!], (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}$.
- $AX \in M_{n,1}(K)$ et pour $i \in [\![1,n]\!], (AX)_i = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} X_k$

Binôme de Newton : soient deux matrices $A, B \in M_n(K)$ telles que $AB = BA$. Alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

Matrices de composées et de l'inverse (*) : soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions respectives non nulles p, n et q. Soit B base de E, C base de F. et D base de G. Soit $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Alors

- $M_{B,D}(v \circ u) = M_{C,D}(v).M_{B,C}(u)$. Autrement dit, la matrice de la composée est le produit des matrices.
- Soit $A = M_{B,C}(u)$. On suppose $n = p$. u est bijective si et seulement si $A \in GL_n(K)$. De plus, on a alors $A^{-1} = (M_{C,B}(u^{-1}))$.

Inverse et transposée (*) : Soit $A,B \in GL_n(K)$. Soient $C,D \in M_n(K)$ Alors :

- $(C\,D)^T = D^T C^T$
- $(AB) \in GL_n(K)$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $A^T \in GL_n(K)$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Espaces d'applications linéaires (*) : $\Psi : \begin{array}{c} L(E,F) \to M_{n,p}(K) \\ g \to M_{B,C}(g) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En particulier, si $(f,g) \in L(E,F)^2$ et $\lambda \in K$, alors $M_{B,C}(\lambda f + g) = \lambda M_{B,C}(f) + M_{B,C}(g)$
On a alors $\dim(L(E,F)) = \dim E . \dim F = n\,p$.
Pour trouver la dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires, on peut ainsi chercher la dimension de l'ensemble des matrices correspondantes.

Application linéaire canoniquement associée (*) : soit $A \in M_{n,p}(K)$. On note B la base canonique de K^p et C la base canonique de K^n. L'application linéaire a canoniquement associée à A est l'unique application linéaire telle que $M_{B,C}(a) = A$.

Remarques :

- En identifiant $M_{p,1}(K)$ et K^p d'une part, et $M_{n,1}(K)$ et K^n d'autre part, on a alors $a : \begin{array}{c} K^p \to K^n \\ X \to AX \end{array}$.
- Quand on veut résoudre un problème sur les matrices en utilisant les applications linéaires, on peut considérer l'application linéaire canoniquement associée à A.

Noyau et image d'une matrice (*) : soit $A \in M_{n,p}(K)$. Les colonnes de A sont notées $C_1,...,C_p \in M_{n,1}(K)$. Alors si a est canoniquement associée à A :

- $\ker(A) = \{X \in M_{p,1}(K), AX = 0\} = \ker(a)$
- $\mathrm{Im}(A) = Vect(\{C_1,...,C_p\}) = \{AX, X \in M_{p,1}(K)\} = \mathrm{Im}(a)$.
- Théorème du rang : $\dim(\ker(A)) + rg(A) = p$ (c'est-à-dire le nombre de colonnes de la matrice).

Explication pour $Vect(\{C_1,...,C_p\}) = \{AX, X \in M_{p,1}(K)\}$:

Rang d'une matrice et d'une application linéaire (*) : Soit $f \in L(E,F)$ $A = M_{B,C}(f)$.

Alors $rg(A) = rg(C_1,...,C_p) = \dim\left(Vect(\{C_1,...,C_p\})\right) = rg(f)$.

Le rang d'une application linéaire est égal à celui de sa matrice. C'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

Caractérisation des matrices inversibles (*) : soit $A \in M_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible
2) $\ker(A) = \{0\}$
3) $rg(A) = n$
4) Les colonnes de A forment une famille libre dans K^n.
5) $\mathrm{Im}(A) = K^n$

Rang d'un produit ou de la transposée (*) : soit $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$. Alors :

- $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$
- Quand on multiplie une matrice par une matrice inversible, le rang est inchangé.
- $rg(A^T) = rg(A)$. Ainsi, le rang de la matrice A est égal au rang de la famille ses lignes. Il est donc inférieur ou égal à $\min(n,p)$.

Traduction matricielle de l'image d'un vecteur : Soit $g \in L(E,F)$. Soit $A = (A_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ la matrice de g dans les bases B et C. Soient $x \in E$, $y \in F$, $X = M_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = M_C(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors $g(x) = y \Leftrightarrow Y = AX$.

- Pour trouver les coordonnées de l'image d'un vecteur x par l'application linéaire g, on calcule donc AX.
- Ainsi, pour trouver le noyau d'une application linéaire *g,* on peut résoudre l'équation $AX = 0$. On peut aussi utiliser $rg(A)$ et le théorème du rang.

Exemple : soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base et la dimension de $\ker(f)$. Trouver les $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = (3,-1,1)$

2) <u>Déterminant d'une matrice carrée.</u>

Soit, dans tout le chapitre, un entier naturel $n \geq 2$.
E est un $K-$espace vectoriel de dimension n. $B=\left(e_1,..,e_n\right)$ est une base de E

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base : Il existe une unique application $f : E^n \to K$ telle que :

1) f est alternée (si $\exists i \neq j, u_i = u_j$, alors $f(u_1,..,u_i,..,u_j..,u_n)=0$).
2) f est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
3) $f(e_1,..,e_n)=1$

Cette application est notée $\det_B$ et appelée déterminant dans la base B.

Caractérisation des bases : on considère une famille de vecteurs $U=\left(u_1,..,u_n\right) \in E^n$. Alors U est une base de E si et seulement si $\det_B(U) \neq 0$ (avec $\det_B(U)=\det_B(u_1,..,u_n)$).

Déterminant d'un endomorphisme : Soit $f(B)=\left(f(e_1),..,f(e_n)\right)$. Le scalaire $\det_B(f(B))$ est indépendant de la base B de E choisie. Il est appelé déterminant de f et noté $\det(f)$.

Déterminant d'une matrice $A \in M_n(K)$.

- Le déterminant de A est le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n.
- Si $f \in L(E)$ et $M_B(f)=A$, alors $\det(A)=\det(f)$. Le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base.

Propriétés du déterminant d'une matrice (*) : soit $A, B \in M_n(K)$. Alors :

- Quand on échange deux colonnes de A, le déterminant est multiplié par (-1).
- Si deux colonnes de A sont identiques, alors $\det(A)=0$.
- si $\lambda \in K$, $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$
- Si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes, alors le déterminant est inchangé.
- $\det(AB)=\det(A).\det(B)$
- si $A \in GL_n(K)$, $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$
- $\det(A^T)=\det(A)$. En particulier, les opérations sur les lignes ont le même effet sur le déterminant que celles sur les colonnes.

Exemple : Existe-il $M \in M_{2025}(\mathbb{R})$ telle que $M^{2024} = -I_{2025}$?

Déterminant et inversibilité (*) : soit $A \in M_n(K)$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Cas particuliers utiles :

- si $a,b,c,d \in K$, alors $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$.
- soit $A \in M_n(K)$, triangulaire. Alors $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} A_{k,k}$.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne : soit $A \in M_n(K)$ et n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, on définit le cofacteur $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M(i,j))$, où $M(i,j) \in M_{n-1}(K)$ est la matrice obtenue en supprimant la $i-ème$ ligne et la $j-ème$ colonne de A.

Alors $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} D_{ij}$ (développement par rapport à la $j-ème$ colonne de A).

Et $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} D_{ij}$ (développement par rapport à la $i-ème$ ligne de A).

Le signe de $(-1)^{i+j}$ dans D_{ij} est donné par le tableau de signes : $\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$.

Exemples :

1) Calculer $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

2) Déterminant d'une matrice tridiagonale $D_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & & & 0 \\ b & a & c & 0 & & 0 \\ 0 & b & a & c & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & b & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$, avec $a,b,c \in K$

. Etablir une relation entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 2$

3) Changement de base et matrices semblables. Trace.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives non nulles p et n.

Rappel (*) : On considère $B = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $B' = (e_1', e_2', ..., e_p')$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de B à B' (ou matrice des vecteurs de B' dans B) la matrice $P = (P_{i,j}) \in M_p(K)$ telle que pour $1 \leq j \leq p$, la $j-ème$ colonne de P est constituée des coordonnées de e_j' dans la base $B = (e_1, e_2, ..., e_p)$. On la note $P_{B,B'}$. On a alors :

- $M_{B',B}(Id_E) = P_{B,B'}$.
- $P_{B,B'} \in GL_n(K)$ et $(P_{B,B'})^{-1} = P_{B',B}$.

Exemple : si $B = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$, donner $P_{B,B'}$

Proposition : formule de changement de base.. Soit B et B' deux bases de E, C et C' deux bases de F. Soit $f \in L(E,F)$. On note $M_{B,C}(f) = A$ et $M_{B',C'}(f) = A'$. Alors $A = P_{C,C'} A' \left(P_{B,B'}\right)^{-1}$ (ou encore $A' = (P_{C,C'})^{-1} A P_{B,B'}$).

Corollaire (*) : cas d'un endomorphisme. Soient B et B' deux bases de E, et P la matrice de passage de B à B'. Soit $f \in L(E)$, $M_B(f) = A$ et $M_{B'}(f) = A'$. Alors $A = P A' P^{-1}$ (ou aussi $A' = P^{-1} A P$).

Matrices semblables (*) : soit $A, A' \in M_n(K)$. A et A' sont **semblables** si et seulement si une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- Il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P A' P^{-1}$
- Il existe un espace vectoriel E, deux bases B, B' de E et $f \in L(E)$ tels que $A = M_B(f)$ et $A' = M_{B'}(f)$ (c'est-à-dire que A et A' représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes).

Définition (*) : On définit l'application Trace tr sur $M_n(K)$ par $\forall A \in M_n(K), tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$ (c'est la somme des termes diagonaux de la matrice).

Propriétés :
- L'application tr est une forme linéaire sur $M_n(K)$.
- Si $A \in M_n(K)$, alors $tr(A) = tr(A^T)$

Proposition (*,PV) : soient $A, B, A' \in M_n(K)$.
- On a $tr(AB) = tr(BA)$
- On suppose que A et A' sont semblables. Alors $tr(A) = tr(A')$, $rg(A) = rg(A')$ et $\det(A) = \det(A')$.

Preuve :

Remarques :
- Que peut-on dire d'une matrice semblable à λI_n, avec $\lambda \in K$?
- Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Que dire de leurs rangs, traces et déterminants ?

Définition : soit $f \in L(E)$. Alors $tr\left(M_B(f)\right)$ ne dépend pas de la base de E choisie. On pose ainsi $tr(f) = tr\left(M_B(f)\right)$, où B est n'importe quelle base de E.

Exemple (*,PV) : soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors il existe une base B de E telle que $M_B(p)$ est diagonale. De plus, $tr(p) = rg(p)$.

4) Interpolation de Lagrange et Vandermonde

Propriété-définition : polynômes interpolateurs de Lagrange. Soit $x_1, ..., x_{n+1} \in K$, deux à deux distincts. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Alors il existe un unique polynôme $P_i \in K_n[X]$ tel que $P_i(x_i) = 1$ et tel que $\forall j \neq i, P_i(x_j) = 0$.

Preuve : par analyse et synthèse.

Proposition (*,PV) : Soient $x_1, ..., x_{n+1} \in K$, deux à deux distincts et $P_1, ... P_{n+1}$ les polynômes interpolateurs de Lagrange en $x_1, ..., x_{n+1}$. Alors $B = (P_1, ... P_{n+1})$ est une base de $K_n[X]$.

De plus, si $P \in K_n[X], P = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) P_k$

Preuve : à faire.

Corollaires :

- Sous les mêmes hypothèses, $\sum_{k=1}^{n+1} P_k = 1$.
- Si $y_1,...,y_{n+1} \in K$, il existe un unique polynôme $P \in K_n[X]$ tel que pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on ait $P(x_i) = y_i$.

Preuve : avec les polynômes de Lagrange ou directement avec un isomorphisme.

Proposition (*) : Déterminant de Van der Monde. Soit $n \geq 2$. Soit $x_1,...,x_n \in K$ et

$$V_n(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & & x_2^{n-1} \\ 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$ la matrice de Vandermonde associée.

Alors $D_n = \det\left(V_n(x_1,...,x_n)\right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i)$

En particulier, $V_n(x_1,...,x_n)$ est inversible si et seulement si $x_1,...,x_n$ sont deux à deux distincts.

Preuve : on distingue deux cas.

- Si $\exists p \neq q$ tel que $x_p = x_q$, alors la matrice a deux colonnes identiques donc elle n'est pas inversible. On a alors $D_n = 0 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$
- Sinon on procède par récurrence sur $n \geq 2$ et on prouve $P(n)$: « si $x_1,...,x_n \in K$ sont deux à deux distincts, alors $D_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i)$ »

Remarque : on prend $x_1,...,x_{n+1} \in K$, deux à deux distincts, et $y_1,...,y_{n+1} \in K$. On cherche $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K_n[X]$ tel que pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on ait $P(x_i) = y_i$.

Le problème s'écrit $$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & & x_2^{n-1} \\ 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ \\ \\ \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$ et a une unique solution car la matrice est inversible.

Proposition (*,PV) : soit $f \in L(E)$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p \in K$, tous distincts. On note pour $1 \le i \le k$: $F_i = \ker\left(f - \lambda_k Id_E\right)$. Alors la somme $F_1 + ... + F_p$ est directe.

Preuve : on écrit la liberté et on applique f. On conclut avec $\left(V_n\right)^T$ inversible.

5) <u>Sous-espaces stables et matrices par blocs</u>

Soit E un K- espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

Définition (*) : soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $f \in L(E)$. On dit que F est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$ ($\forall x \in F, f(x) \in F$).

L'endomorphisme induit par f sur F est alors $f_F : \begin{matrix} F \to F \\ x \to f(x) \end{matrix}$. On a ainsi $f_F \in L(F)$

Exemples : soit $u \in L(E)$.

- $\{0_E\}$ et E sont stables par u.
- Soit $\lambda \in K$. Alors $\operatorname{Im}(u)$, $Ker(u)$ sont stables par u
- On suppose que p est la projection sur A parallèlement à B, avec $A \oplus B = E$. Donner l'endomorphisme induit par p sur A et sur B.

Proposition (*) : soit $u, v \in L(E)$. Soit $\lambda \in K$. On suppose $u \circ v = v \circ u$. Alors $Ker(u - \lambda Id_E)$ est stable par v (en particulier, $Ker(u)$ est stable par v).

Preuve : à faire.

Matrice par blocs : soit $M \in M_n(K)$. Soit $q \in [\![1, n-1]\!]$.
On peut écrire M sous forme de matrice par blocs :
$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in M_q(K), B \in M_{q,n-q}(K), C \in M_{n-q,q}(K), D \in M_{n-q}(K)$.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

Proposition : soit $u \in L(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $q \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit $e = \left(e_1, .., e_n\right)$ est une base de E adaptée à F, telle que $\left(e_1, .., e_q\right)$ est une base de F.
Alors $u(F) \subset F$ si et seulement si la matrice de u dans e est égale à $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $A \in M_q(K), B \in M_{q,n-q}(K), D \in M_{n-q}(K)$.
A est alors la matrice de u_F dans la base $\left(e_1, .., e_q\right)$.

Preuve :

Exemple : soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $q \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer $\dim\left(\{u \in L(E), u(F) \subset F\}\right)$.

Généralisation : On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, avec $\forall i \in [\![1, p]\!], \dim(F_i) = d_i$ (donc $\sum_{i=1}^{p} d_i = n$)
Soit B est une base de E adaptée à cette décomposition. B est ainsi la famille de vecteurs obtenue en juxtaposant les vecteurs des bases $B_1, B_2, ..., B_p$ de $F_1, F_2, ..., F_p$.

Alors $\left(\forall i \in [\![1, p]\!], u(F_i) \subset F_i\right)$ si et seulement si $M_B(u) = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_p \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale par blocs, où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ $A_i = M_{B_i}(u_{F_i}) \in M_{d_i}(K)$

Lorsque $M = M_B(u) = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$, où $A_1, .., A_p$ sont des matrices carrées, on dit que M est triangulaire supérieure par blocs ; on a alors $u(F_1) \subset F_1$, $u(F_1 \oplus F_2) \subset F_1 \oplus F_2, \ldots$ et ainsi de suite.

Opérations sur les matrices par blocs : Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in K$, avec $A, A' \in M_q(K), B, B' \in M_{q,n-q}(K), C, C' \in M_{n-q,q}(K), D, D' \in M_{n-q}(K)$. Alors
$M + \lambda N = \begin{pmatrix} A + \lambda A' & B + \lambda B' \\ C + \lambda C' & D + \lambda D' \end{pmatrix}$, $M\,N = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$ et $M^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$

Preuve : non faite. Explication :

Attention : il faut bien respecter l'ordre dans les différents produits matriciels car ils ne commutent pas. Les tailles des blocs doivent être compatibles pour que les produits matriciels aient un sens.

Exemple : soit $A, D \in M_n(K)$. On suppose A et D semblables. Alors $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ sont semblables. Avec $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$

Proposition (*) : déterminant par blocs. Soit $q \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_n(K)$, avec $A \in M_q(K), B \in M_{q,n-q}(K), D \in M_q(K)$
Alors $\det(M) = \det(A).\det(D)$

Preuve : $M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_q & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$. Puis on calcule le déterminant de chacune de ces matrices en développant par rapport aux colonnes là où il y a l'identité.

Remarque : une formule analogue pour $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\det(A).\det(D)-\det(B).\det(C)$ n'aurait pas de sens car les matrices B,C ne sont pas carrées en général. C'est faux même si elles le sont toutes (avec $M=\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & 2I_2 \end{pmatrix}$).

Propriété : Soit $M=\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$, triangulaire par blocs. où $A_1,..,A_p$ sont des matrices carrées. Alors $\det(M)=\prod_{i=1}^{p}\det(A_i)$

Preuve rapide : se déduit directement de la proposition précédente par récurrence. C'est vrai aussi pour les matrices triangulaires inférieures car le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

6) <u>Polynômes d'endomorphismes et de matrices.</u>

Soit E un K espace vectoriel. Soient $u,v\in L(E)$. Soit aussi $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_n(K)$

Définition (*) : soit $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k\in K[X]$.

- On définit $P(u)\in L(E)$ par $P(u)=\sum_{k=0}^{p}a_ku^k=a_0Id_E+a_1u+a_2u\circ u+...+a_pu^p$. Ici, $u^0=Id_E$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u^{n+1}=u^n\circ u=u\circ u^n$.
- On définit $P(A)\in M_n(K)$ par $P(A)=\sum_{k=0}^{p}a_kA^k=a_0I_n+a_1A+a_2A^2+...+a_nA^n$.

Exemple : soit $P=2+3X+X^3$ et $A\in M_n(K)$. Préciser ce que vaut $P(A)$.

Propriétés : soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. Soit $u\in L(E)$ et $A\in M_n(K)$. Alors :

- $PQ(u)=P(u)\circ Q(u)=Q(u)\circ P(u)$
- $PQ(A)=P(A)\circ Q(A)=Q(A)\circ P(A)$

Preuve non faite. Explication sur un exemple avec $(3u^2-2Id_E)\circ(4u^3+u)$.

Corollaire : soit $u \in L(E)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in K[X]$. Alors $\ker(P(u))$ est stable par u.

Définition : soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in K[X]$.

- P est un polynôme annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0_{L(E)}$.
- P est un polynôme annulateur de A si et seulement si $P(A)$ est la matrice nulle.

D) <u>Méthodes en algèbre linéaire :</u>

Soit E est un $K-$espace vectoriel.

Montrer une égalité d'espaces vectoriels en dimension finie : soient F, G deux espaces vectoriels de dimension finie. Pour montrer $F = G$, on a deux méthodes possibles :

- Montrer $F \subset G$ et $G \subset F$
- Montrer une des deux inclusions et $\dim(F) = \dim(G)$

Montrer qu'une famille $L = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E :

- Si on connait la dimension de E, il suffit de montrer qu'elle est libre **ou** génératrice.
- Si on ne connait pas la dimension de E, on prouve qu'elle est libre **et** génératrice.

Montrer que $F \subset E$ est un espace vectoriel :

- On peut utiliser le critère de sous-espace vectoriel.
- On peut montrer que F est le noyau d'une application linéaire.
- On peut montrer que F est l'espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Pour trouver la dimension de F :

- Déterminer une base de F et compter le nombre d'éléments.
- Montrer que F est isomorphe à un espace vectoriel dont on connait la dimension.
- Montrer que F est le noyau d'une application linéaire dont on connait l'image.

Exemples :

- Soit $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel. En déterminer une base et la dimension.
- Déterminer $\dim(S_n(\mathbb{R}))$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $H = \{M \in M_n(K), tr(M) = 0\}$. Montrer que H est un espace vectoriel, en déterminer la dimension.

Montrer que $F \oplus G = E$:

- En dimension finie, deux méthodes :
  - on prouve le plus souvent $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$
  - on peut aussi montrer qu'en réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de E.
- En dimension quelconque, on peut :
  - prouver $\forall x \in E, \exists!(f,g) \in F \times G, x = f + g$
  - montrer $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

Exemple : soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L(E)$.
Montrer que $\ker(u) = \ker(u \circ u) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.

Montrer qu'une matrice $A \in M_p(K)$ **est inversible et éventuellement calculer son inverse.**

- Si on veut seulement montrer A inversible, mais pas calculer l'inverse :
  - Il suffit de prouver que la seule solution de $AX = 0$ est $X = 0$.
  - Quand il est facile à calculer, on peut aussi vérifier que $\det(A) \neq 0$.
  - On peut aussi montrer $rg(A) = n$ avec les colonnes de A.

- Si on veut montrer que A est inversible **et** calculer son inverse, on peut :
  - Trouver un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_0 \neq 0$. Alors on écrit $A\left(-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_0} A^{k-1}\right) = I_n$, et on conclut A inversible et $A^{-1} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_0} A^{k-1}$.
  - Si A est la matrice dans une base B d'une application linéaire f bijective dont on connait la réciproque f^{-1}, alors $A^{-1} = M_B\left(f^{-1}\right)$
  - Résoudre le système $AX = B$ avec $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, quelconque, ou utiliser des opérations élémentaires pour passer en parallèle de A à I_n et de I_n à A^{-1}.

Exemple : soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ telle que $\left(A - I_p\right)^n = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Calculer A^n , avec $n \in \mathbb{N}^*$, pour $A \in M_p(K)$:

- Deviner le résultat ou sa forme et le prouver par récurrence.
- Utiliser le binôme de Newton en écrivant $A = B + C$, où $BC = CB$, lorsque les puissances de B et C se calculent bien.
- Obtenir une matrice simple (si possible diagonale, sinon triangulaire) à laquelle A est semblable. Alors $A = P D P^{-1}$ où P est une matrice inversible. Alors $A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}....PDP^{-1} = P D^n P^{-1}$.
- Utiliser une application linéaire f dont la matrice est A et calculer A^n à l'aide de f^n (ici f^n désigne une composée).

Exemple 1 : on suppose que $A \in M_p(\mathbb{R})$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^p$.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $(I_p + A)^n$.

$(I_p + A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k = \left(2^n - 1\right) A + I_p$.

Exemple 2 : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

On utilise $f(P) = P(X+1)$ et $f^n(P) = P(X+n)$. Il vient $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que deux matrices $A, M \in M_p(K)$ sont semblables (ou pas)

- Si les deux matrices n'ont pas même rang, même trace ou même déterminant, alors elles ne sont pas semblables.
- Pour étudier en général si elles sont semblables, on prend f canoniquement associée à A et on cherche s'il existe une base C de K^p telle que $M = M_C(f)$.
- Garder en tête que si $\lambda \in K$, la seule matrice semblable à λI_p est λI_p.

Exemple 1 : soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que ces deux matrices sont semblables.

Exercice 2 : soit $A \in M_n(K)$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ mais $A^n = 0$. Montrer que A est semblable à

$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.