DM 1 pour le jeudi 19 Septembre

Les devoirs à la maison sont essentiels et doivent être cherchés et rédigés avec grande application. Le travail collectif (échanges avec les autres étudian.e.s de la classe ou avec moi) est tout à fait bienvenu, mais la rédaction doit être personnelle et chacun.e doit rendre une copie (si deux étudiant.e.s travaillent efficacement ensemble, il est également possible de rendre une copie pour deux).
Les résultats doivent être encadrés ou bien mis en valeur, notamment ceux qui ne sont pas donnés par l'énoncé. La copie ne sera pas corrigée en détail si ce n'est pas le cas. Les principaux arguments doivent également apparaître clairement.
Il est tout à fait possible de sauter certaines questions et de ne pas tout faire.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et de base $B=(e_1,e_2,e_3)$. On considère l'endomorphisme $f\in L(E)$ tel que $M_B(f)=A=\begin{pmatrix}-1&4&-1\\-5&8&-1\\1&-2&3\end{pmatrix}$. Si $h\in L(E)$, on note $h^2=h\circ h$.

1)
   a) Déterminer une base et la dimension de $F=\ker(f-2Id_E)$
   b) Déterminer le rang de $A-4I_3$ (où $I_3\in M_3(\mathbb{R})$ désigne la matrice identité).
   c) Calculer $(A-4I_3)^2$. Déterminer une base et la dimension de $G=\ker((f-4Id_E)^2)$
   d) A-t-on $E=F\oplus G$?
2) Montrer qu'il existe $e'_2\in G$ tel que $e'_1=(f-4Id)(e'_2)\neq 0_E$. Soient de tels vecteurs dans la suite.
3) Soit e'_3 un vecteur non nul de F. Montrer que $C=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de E.
4) Déterminer la matrice de f dans la base C.
5) Déterminer les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ telles que $A-\lambda I_3$ est inversible.

Problème 2 (EM Lyon 18) : Soit $n\geq 2$ un entier naturel. On note $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $B=(1,X,...,X^n)$ sa base canonique. Pour tout polynôme $P\in E$, on note $f(P)=\frac{1}{n}X(1-X)P'+XP$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer la matrice A de f dans la base B. Quel est le rang de A ?
3) Soit P un polynôme non nul de $\ker(f)$. Montrer que 1 est l'unique racine de P dans $\mathbb{C}$ et que P est de degré n. En déduire une base de $\ker(f)$.
4) On pose pour $0\leq k\leq n$ $P_k=X^k(1-X)^{n-k}$
   a) Démontrer que $C=(P_0,P_1,..P_n)$ est une base de E.
   b) Expliciter la matrice D de f dans la base C.
5) Soit $C(D)=\left\{N\in M_{n+1}(\mathbb{R}), ND=DN\right\}$
   a) Montrer que $C(D)$ est un espace vectoriel et en déterminer une base et la dimension.
   b) Soit $N\in M_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $N^2=D$, alors $N\in C(D)$.
   c) Combien y-a-t-il d'applications $g\in L(E)$ telles que $g\circ g=f$?

Problème 3 : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in L(E)$. On rappelle que f est nilpotent si et seulement s'il existe un entier naturel q tel que $f^q = 0$.

1) Soit p un entier naturel. Soit $f \in L(E)$.
   a) Montrer que $Ker(f^p) \subset Ker(f^{p+1})$ et que $f(Ker(f^{p+1})) \subset Ker(f^p)$
   b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $u = f_{/F}$ la restriction de f à F. Déterminer $Ker(u)$ en fonction de $Ker(f)$ et de F.
   c) Avec la restriction u de f à $Ker(f^{p+1})$, démontrer $\dim(Ker\, f^{p+1}) \leq \dim(Ker\, f^p) + \dim(Ker\, f)$.
   d) Montrer que $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\dim(Ker\,(f^p)) \leq p \dim(Ker\ f)$.
2) Soit f un endomorphisme nilpotent de E.
   a) Justifier que $\dim(Ker(f)) \geq 1$.
   b) On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $Ker(f^p) = Ker(f^{p+1})$. Montrer alors que $\forall r \geq p, Ker(f^p) = Ker(f^r)$.
   c) Soit p un entier naturel tel que $f^p \neq 0$. Montrer que $\dim(Ker\, f^{p+1}) - \dim(Ker\, f^p) \geq 1$
   d) En déduire que $f^n = 0$.
3) *Facultatif.* On suppose maintenant que f est nilpotent et que le rang de f est égal à $n-1$.
   a) En utilisant les résultats obtenus précédemment, montrer que si $0 \leq p \leq n$, alors $\dim(Ker\,(f^p)) = p$.
   b) Démontrer que si $0 \leq p \leq n, \mathrm{Im}(f^p) = Ker(f^{n-p})$

Exercice 4 (oral CCINP) **:** soit E un K - espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. L'application identité de E est notée Id_E. Soit $f_1, f_2, ..., f_k \in L(E)$ telles que $f_1 + f_2 + ... + f_k = Id_E$ et pour tous $i \neq j$, $f_i \circ f_j = 0_{L(E)}$.
Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in K$, deux à deux distincts, et $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_k f_k$

1) Montrer que $f_1, f_2, ..., f_k$ sont des projecteurs.
2) Démontrer que $E = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{Im}(f_i)$.
3) Soit dans la suite B une base adaptée à la décomposition $E = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{Im}(f_i)$. Montrer que la matrice de f dans B est diagonale.
4) Calculer f^p pour tout entier naturel p
5) Montrer que $(f_1, f_2, ..., f_k)$ est libre.
6) Montrer que $(Id_E, f, f^2, ..., f^{k-1})$ est libre (*facultatif*).