DS1 PCC : corrigé

Exercice 1 (début centrale PC 2019).

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{\sin(x)+1}{\cos(x)}$.

1) f est dérivable sur I et il vient : $\boxed{f'(x)=\frac{\cos^2(x)+\left(\sin(x)+1\right)\sin(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}}$

Puis $f''(x)=\frac{\cos^3(x)+2\cos(x)\sin(x)\left(\sin(x)+1\right)}{\cos^4(x)}=\frac{\cos^2(x)+2\sin(x)\left(\sin(x)+1\right)}{\cos^3(x)}$

Donc $\boxed{f''(x)=\frac{1+2\sin(x)+\sin^2(x)}{\cos^3(x)}}$.

2) f est de classe C^∞ sur I en tant que quotient de fonctions C^∞ avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

On procède par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ et on montre :

$H(n)$: "il existe un polynôme P_n , tel que $\forall x\in I, f^{(n)}(x)=\frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$ "

- $H(0)$ est vraie avec $\forall x\in\mathbb{R}, P_0(x)=x+1$.
- soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. On a $\forall x\in I, f^{(n)}(x)=\frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$, donc en dérivant, il vient :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{\cos^{n+2}(x)P_n'(\sin(x))+P_n(\sin(x))(n+1)\sin(x)\cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(1-\sin^2(x))P_n'(\sin(x))+P_n(\sin(x))(n+1)\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}.$$

On pose alors pour tout réel x : $\boxed{P_{n+1}(x)=(1-x^2)(P_n)'(x)+(n+1)xP_n(x)}$

P_{n+1} est bien un polynôme. $H(n+1)$ est vraie, ce qui achève la preuve.

De plus, $\boxed{\text{on a } P_0(x)=P_1(x)=x+1 \text{ et } P_2(x)=(1-x^2)+2x(1+x)=(x+1)^2}$

C'est conforme à l'expression de f'' pour P_2 .

Enfin, $P_3(x)=2(1-x^2)(1+x)+3x(1+2x+x^2)$, donc $\boxed{P_3(x)=x^3+4x^2+5x+2}$

On procède par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ et on montre :

$H(n)$: P_n est de degré n , à coefficients entiers naturels et que le coefficient du terme de degré n est égal à 1.

- $H(1)$ est vraie avec $\forall x\in\mathbb{R}, P_1(x)=x+1$.
- soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ est vraie. On a $P_n(x)=x^n+R_n(x)$, avec $\deg(R_n)<n$ et les coefficients de R_n qui sont entiers naturels. On sait que pour $x\in\mathbb{R}$, on a $P_{n+1}(x)=(1-x^2)(P_n)'(x)+(n+1)xP_n(x)$ donc $P_{n+1}(x)=(1-x^2)\left(nx^{n-1}+R_n'(x)\right)+(n+1)x\left(x^n+R_n(x)\right)$.

  Donc $P_{n+1}(x)=x^{n+1}+\left(nx^{n-1}+(1-x^2)R_n'(x)+(n+1)xR_n(x)\right)$.

  Si on note $Q_n(x)=nx^{n-1}+(1-x^2)R_n'(x)+(n+1)xR_n(x)$, Q_n est à coefficients entiers relatifs, car R_n' et R_n le sont. Il reste à voir si les coefficients sont positifs.

  On note $R_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k$. Alors $R_n'(x)=\sum_{k=1}^{n-1}k\,a_kx^{k-1}$.

Donc $Q_n(x) = n\,x^{n-1} + (1-x^2)\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\,a_k x^{k-1}\right) + (n+1)x\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = n\,x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k\,a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1-k)\,a_k x^{k+1}$

Comme $n+1-k \geq 0$ pour $k \leq n-1$, Q_n est de degré inférieur ou égal à n et ses coefficients sont bien des entiers naturels. donc $H(n+1)$ est vraie, ce qui achève la preuve.

4) On a établi la relation $P_{n+1}(x) = (1-x^2)(P_n)'(x) + (n+1)\,x\,P_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Donc $P_{n+1}(1) = (n+1)P_n(1)$ et $P_n(1) = n\,P_{n-1}(1) = n(n-1)P_{n-2}(1) = n(n-1)...2.1P_0(1)$

Par récurrence, $\boxed{P_n(1) = n!P_0(1) = 2n!}$. De même, $\boxed{P_n(-1) = n!P_0(-1) = 0}$

5) On a vu que pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$. Or $f^2(x)+1 = \dfrac{(\sin(x)+1)^2 + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{2+2\sin(x)}{\cos^2(x)} = 2f'(x)$

$\boxed{\text{On a bien } \forall x \in I, 2f'(x) = f^2(x)+1}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $2f'(0) = f^2(0)+1$, on a $\boxed{2a_1 = (a_0)^2 + 1}$

Comme f est de classe C^∞ sur I, on peut appliquer la formule de Leibniz et dériver n fois la relation $2f'(x) = f^2(x)+1$. Il vient $2f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$.

En l'appliquant pour $x=0$, il vient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k\,a_{n-k}}$

7) On sait que f est de classe C^∞ sur I, donc d'après Taylor Young, elle admet un développement limité à tout ordre en 0. Il est donné par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$, avec $b_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{a_k}{k!}$.

On a donc pour $k \in \mathbb{N}$: $a_k = b_k k!$

Ainsi, avec la question précédente : $2(n+1)!b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_k k! b_{n-k}(n-k)! = n!\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$.

On a donc bien $\boxed{b_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}}$

<u>Problème 2 (début centrale PC 2017)</u> : on note E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites (U_n) convergentes telles que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ A toute suite (U_n) appartenant à E et de limite $a \in \mathbb{R}$, on associé la suite (U_n^c) définie à partir d'un certain rang par $U_n^c = \left|\dfrac{U_{n+1}-a}{U_n - a}\right|$.

1a) On considère la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \dfrac{1}{n+1}$.. Elle converge vers 0 et $\forall n \geq 0, U_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Donc $(U_n) \in E$. De plus, $U_n^c = \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et (U_n^c) est donc convergente. Donc $(U_n) \in E^c$ et $\boxed{E^c \neq \varnothing}$

1b) La suite nulle n'est pas élément de E^c car elle ne vérifie pas $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

$\boxed{\text{Donc } E^c \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

1c) E^c est inclus dans E par définition. Il reste à montrer que l'inclusion est stricte, c'est-à-dire qu'il existe une suite (U_n) élément de E telle que (U_n^c) ne soit pas convergente.

On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $U_{2n} = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et $U_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+2)}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, donc par encadrement, (U_n) converge vers 0 et $\forall n \geq 0, U_n \neq \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

En outre, $U_{2n}^c = \left| \dfrac{U_{2n+1}}{U_{2n}} \right| = \dfrac{(2n+1)^2}{2n+2} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$, donc (U_n^c) n'est pas convergente (sinon toute suite extraite de (U_n) tendrait vers la même limite, ce qui n'est pas le cas ici). $\boxed{\text{Donc } E^c \subset E, \text{ avec } E^c \neq E}$

1d) Soit (U_n) une suite appartenant à E^c, de limite $a \in \mathbb{R}$. On a pour $n \in \mathbb{N}$: $U_n^c = \left| \dfrac{U_{n+1} - a}{U_n - a} \right| \geq 0$.

Par passage des inégalités à la limite, on a donc $a^c \geq 0$ (on sait que (U_n^c) converge vers a^c).

On suppose par l'absurde que $a^c > 1$. Alors à partir d'un certain rang N, $U_n^c = \left| \dfrac{U_{n+1} - a}{U_n - a} \right| > 1$.

Donc $|U_{n+1} - a| > |U_n - a|$. La suite $(b_n)_{n \geq N} = \left(|U_n - a| \right)_{n \geq N}$ serait alors strictement croissante et strictement positive : elle ne pourrait donc pas tendre vers 0. C'est absurde car on sait que $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$. Donc $\boxed{a^c \in [0,1]}$

2) Tout d'abord, on note $U_n = \dfrac{1}{(n+1)^k}$. Cette suite tend vers 0 et $\forall n \geq 0, U_n \neq \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. Donc $(U_n) \in E$.

De plus, $U_n^c = \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \left(\dfrac{n+1}{n+2} \right)^k \underset{n \to +\infty}{\to} 1$ et (U_n^c) est donc convergente.

$\boxed{\text{Donc } \left(\dfrac{1}{(n+1)^k}\right) \in E^c \text{ et sa vitesse de convergence est lente.}}$

Ensuite, on traite le cas $V_n = n^k q^n$.

On a $q > 1$ et $n^k = o\left(\left(\dfrac{1}{q} \right)^n \right)$, donc $V_n = n^k q^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et $\forall n \geq 0, V_n \neq \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$. Donc $(V_n) \in E$.

Puis $V_n^c = \left| \dfrac{V_{n+1}}{V_n} \right| = \left(\dfrac{n+1}{n} \right)^k q \underset{n \to +\infty}{\to} q$ et (V_n^c) est donc convergente.

$\boxed{\text{Donc } (n^k q^n) \in E^c \text{ et sa vitesse de convergence est géométrique de rapport } q}$

Enfin, on traite le cas $W_n = \dfrac{1}{n!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. On a $\forall n \geq 0, W_n \neq \lim\limits_{n \to +\infty} W_n$. Donc $(W_n) \in E$

On a $W_n^c = \left| \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \right| = \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et (W_n^c) est donc convergente.

$\boxed{\text{Donc } \left(\dfrac{1}{n!} \right) \in E^c \text{ et sa vitesse de convergence est rapide}}$

3a) On a $V_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n} \right)^{2^n} = \exp\left(2^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n} \right) \right)$.

On effectue un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

On a $\ln(1+u) = u - \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$, donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n} \right) = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{2n+1}} + o\left(\dfrac{1}{2^{2n}} \right)$.

On a donc $2^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n} \right) = 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{2^n} \right)$. Donc $V_n = e \exp\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{2^n} \right) \right)$

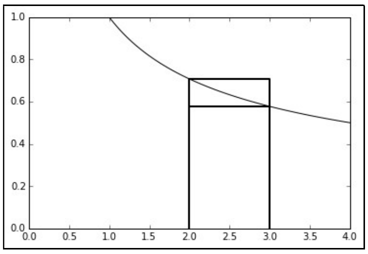
Or $e^u = 1+u+o(u)$ On prend $u = -\frac{1}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$; on a $o(u) = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Donc on a bien $\boxed{V_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)}$

3b) Du résultat précédent, on déduit que $V_n \underset{n\to+\infty}{\to} e$. Donc $V_{n+1} = e - \frac{e}{2^{n+2}} + o\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = e - \frac{e}{2^{n+2}} + o\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right)$ On a donc $V_n^c = \left|\frac{V_{n+1}-e}{V_n - e}\right| \sim \frac{-e}{2^{n+2}}\frac{2^{n+1}}{-e} = \frac{1}{2}$. Donc $V_n^c \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Donc } (V_n) \text{ appartient à } E^c \text{ et sa vitesse de convergence est géométrique de rapport } \frac{1}{2}.}$

4a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \geq n+1 \geq 2$.
On fait un dessin :



Pour $x \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$, donc $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$

Ainsi, pour $k \geq 2$, il vient $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}dx$

On somme pour k allant de $n+1$ à p : il vient $\sum_{k=n+1}^{p} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{p} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}dx$.

Donc avec la relation de Chasles, on obtient : $\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^p \frac{1}{x^\alpha}dx$.

On calcule alors $\int_n^p \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_n^p x^{-\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_n^p = \frac{1}{\alpha-1}\left(n^{1-\alpha} - p^{1-\alpha}\right)$.

$\boxed{\text{On déduit finalement } \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}\right)}$

4b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à passer à la limite dans cette dernière inégalité lorsque p tend vers $+\infty$. On peut le faire car toutes les suites concernées convergent. On a $\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\to} S - S_n$

On a donc bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq S - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}}$

4c) On utilise le théorème d'encadrement sur les équivalents :
$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, donc $S - S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Dès lors, $S_n^c = \left|\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n - S}\right| = \dfrac{S-S_{n+1}}{S-S_n} \sim \dfrac{\alpha-1}{\alpha-1}\dfrac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

$\boxed{\text{Donc } (S_n) \text{ appartient à } E^c \text{ et sa vitesse de convergence est lente}}$.

5) Soit (U_n) un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre $r \in \left]1,+\infty\right[$. Alors la suite définie par $V_n = \dfrac{U_{n+1}-a}{|U_n - a|^r}$ est bornée à partir d'un certain rang.

A partir d'un certain rang, il vient $U_n^c = \left|\dfrac{U_{n+1}-a}{U_n - a}\right| = |V_n||U_n - a|^{r-1}$.

Or (V_n) est bornée et $|U_n - a|^{r-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc par produit, $U_n^c \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

$\boxed{\text{Donc la convergence de la suite } (U_n) \text{ est rapide}}$.

6a) On sait que f est dérivable en a, donc elle est <u>continue</u> en a.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, donc $U_{n+1} = f(U_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(a)$.

Par unicité de la limite, on conclut bien que $\boxed{f(a) = a}$.

6b) On suppose que (U_n) n'est pas stationnaire. On suppose par l'absurde qu'il existe un rang N tel que $U_N = a$. Alors comme $f(a) = a$, il vient $\forall n \geq N, U_n = U_N = a$ et (U_n) serait stationnaire, ce qui est absurde. Donc on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq a}$. Ceci démontre $(U_n) \in E$.

De plus, comme $f(a) = a$, il vient $U_n^c = \left|\dfrac{U_{n+1}-a}{U_n - a}\right| = \left|\dfrac{f(U_n) - f(a)}{U_n - a}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} |f'(a)|$

On déduit que $(U_n) \in E^c$. De plus, la vitesse de convergence de (U_n) est :

- lente si $|f'(a)| = 1$
- géométrique de rapport $|f'(a)|$ si $|f'(a)| \in \left]0,1\right[$
- rapide si $|f'(a)| = 0$

6c) On montre le résultat par la <u>contraposée</u> : on suppose que la suite (U_n) n'est pas stationnaire et on montre que $|f'(a)| \leq 1$. Avec 6b), dans ce cas, on sait que (U_n) est une suite appartenant à E^c.
Avec 1d), on sait aussi que a^c appartient au segment $[0,1]$. Or ici, $a^c = |f'(a)|$. On a donc bien $|f'(a)| \leq 1$.
Donc $\boxed{\text{si } |f'(a)| > 1 \text{, alors } (U_n) \text{ est stationnaire}}$.

6d) Soit $r \geq 2$ un entier naturel. On suppose que f est de classe C^r sur I et que la suite (U_n) n'est pas stationnaire, Comme f est de classe C^r sur I, avec Taylor-Young, elle admet un développement limité à l'ordre r en a : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{r} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o\left(h^r\right)$.

Donc comme $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, $U_{n+1} = f(a + U_n - a) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{r} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(U_n - a)^k + o\left((U_n - a)^r\right) \quad (1)$.

On procède par double implication pour prouver que la vitesse de convergence de (U_n) est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in [\![1, n-1]\!], f^{(k)}(a) = 0$.

$\Rightarrow$ On suppose que la vitesse de convergence de (U_n) est d'ordre r.

Par l'absurde ; si on n'a pas $\forall k \in [\![1, n-1]\!], f^{(k)}(a) = 0$, on considère $p = \min\left\{k \in [\![1, n-1]\!], f^{(k)}(a) \neq 0\right\}$.

Alors avec (1) et $f(a)=a$, $U_{n+1}-a \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f^{(p)}(a)}{p!}(U_n-a)^p$.

Donc $\dfrac{|U_{n+1}-a|}{|U_n-a|^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|f^{(p)}(a)|}{p!}|U_n-a|^{p-r} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, donc la vitesse de convergence de (U_n) n'est pas d'ordre r .

C'est absurde, donc on a bien $\forall k\in[\![1,n-1]\!], f^{(k)}(a)=0$.

$\Leftarrow$ On suppose $\forall k\in[\![1,n-1]\!], f^{(k)}(a)=0$.

Alors $U_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{r}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(U_n-a)^k+o\left((U_n-a)^r\right) \underset{n\to+\infty}{=} a+\dfrac{f^{(r)}(a)}{k!}(U_n-a)^r+o\left((U_n-a)^r\right)$.

Donc il existe une suite (W_n) qui tend vers 0, telle que pour n assez grand, $U_{n+1}-a=\left(\dfrac{f^{(r)}(a)}{k!}+W_n\right)(U_n-a)^r$

Donc $\dfrac{|U_{n+1}-a|}{|U_n-a|^r}=\left|\dfrac{f^{(r)}(a)}{k!}+W_n\right| \underset{n\to+\infty}{\to} \left|\dfrac{f^{(r)}(a)}{k!}+W_n\right|$. Comme toute suite convergente est bornée, on en déduit que $\left(\dfrac{U_{n+1}-a}{|U_n-a|^r}\right)$ est bornée, donc que la vitesse de convergence de (U_n) est d'ordre r .

$\boxed{\text{Donc la vitesse de convergence de } (U_n) \text{ est d'ordre } r \text{ si et seulement si } \forall k\in[\![1,n-1]\!], f^{(k)}(a)=0}$.

Problème 3 : (Mines 2008, option PC). Soit $[r,s]$ un segment de longueur non nulle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^2 à valeurs réelles.

On suppose dans les deux premières questions qu'il existe $K>0$ tel que $\forall t\in[r,s], |f'(t)|\geq K$ et $\forall t\in[r,s], f''(t)\geq 0$.

1) Une primitive de $t \to \dfrac{f''(t)}{(f'(t))^2}$ est $t \to -\dfrac{1}{f'(t)}$. On a donc $\int_r^s \dfrac{f''(t)}{(f'(t))^2}dt=\left[-\dfrac{1}{f'(t)}\right]_r^s=-\dfrac{1}{f'(s)}+\dfrac{1}{f'(r)}$.

Dès lors : $\left|\int_r^s \dfrac{f''(t)}{(f'(t))^2}dt\right|=\left|-\dfrac{1}{f'(s)}+\dfrac{1}{f'(r)}\right|\leq\left|\dfrac{1}{f'(s)}\right|+\left|\dfrac{1}{f'(r)}\right|\leq\dfrac{2}{K}$ $\boxed{\text{On a donc bien } \left|\int_r^s \dfrac{f''(t)}{(f'(t))^2}dt\right|\leq\dfrac{2}{K}}$

2) On pose pour $t\in[r,s]$:

$u'(t)=f'(t)\cos f(t)$, avec $u(t)=\sin f(t)$ .Soit aussi $v(t)=\dfrac{1}{f'(t)}$ et donc $v'(t)=-\dfrac{f''(t)}{(f'(t))^2}$

On a alors en intégrant par parties (les fonctions *u* et *v* sont bien C^1 sur $[r,s]$:

$$\int_r^s \cos f(t)dt=\int_r^s \frac{1}{f'(t)}\left(f'(t)\cos f(t)\right)dt=\left[\frac{\sin(f(t))}{f'(t)}\right]_r^s+\int_r^s \frac{\sin(f(t))}{[f'(t)]^2}f''(t)dt$$

Donc $\left|\int_r^s \cos f(t)dt\right|\leq\left|\dfrac{\sin(f(s))}{f'(s)}\right|+\left|\dfrac{\sin(f(r))}{f'(r)}\right|+\left|\int_r^s \dfrac{\sin(f(t))}{[f'(t)]^2}f''(t)dt\right|$ (1)

Or $\left|\int_r^s \dfrac{\sin(f(t))}{[f'(t)]^2}f''(t)dt\right|\leq\int_r^s\left|\dfrac{\sin(f(t))}{[f'(t)]^2}f''(t)\right|dt\leq\int_r^s\left|\dfrac{f''(t)}{[f'(t)]^2}\right|dt$

Comme $\forall t\in[r,s], f''(t)\geq 0$, on déduit $\left|\int_r^s \dfrac{\sin(f(t))}{[f'(t)]^2}f''(t)dt\right|\leq\int_r^s \dfrac{f''(t)}{[f'(t)]^2}dt$

En reprenant (1), il vient alors $\left|\int_r^s \cos f(t)dt\right| \leq \left|\frac{1}{f'(s)}\right| + \left|\frac{1}{f'(r)}\right| + \left|\int_r^s \frac{f''(t)}{[f'(t)]^2}dt\right|$

On en déduit en utilisant le résultat du 1) que $\left|\int_r^s \cos f(t)dt\right| \leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{2}{K}$

On a donc bien $\boxed{\left|\int_r^s \cos f(t)dt\right| \leq \frac{4}{K}}$

Dans les questions de 3) à 5), $[u,v]$ est un segment de longueur non nulle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^2 à valeurs réelles. On suppose cette fois que $\exists M, \forall t \in [u,v], f''(t) \geq M > 0$

3) Soit $t \in \left[u + \frac{2}{\sqrt{M}}, v\right]$. On a $f'(t) \geq f'(t) - f'(u)$. Donc $f'(t) \geq \int_u^t f''(x)dx$, et $f'(t) \geq \int_u^t M\,dx = M(t-u)$

Mais comme $t \in \left[u + \frac{2}{\sqrt{M}}, v\right]$, on a $t - u \geq \frac{2}{\sqrt{M}}$. Donc $\boxed{\forall t \in \left[u + \frac{2}{\sqrt{M}}, v\right], f'(t) \geq 2\sqrt{M}}$

4) On coupe l'intégrale : $\int_u^v \cos(f(t))dt = \int_u^{u+\frac{2}{\sqrt{M}}} \cos(f(t))dt + \int_{u+\frac{2}{\sqrt{M}}}^v \cos(f(t))dt \quad (2)$

On majore ensuite chacun des deux morceaux : $\left|\int_u^{u+\frac{2}{\sqrt{M}}} \cos(f(t))dt\right| \leq \int_u^{u+\frac{2}{\sqrt{M}}} |\cos(f(t))|dt \leq \int_u^{u+\frac{2}{\sqrt{M}}} 1\,dt \leq \frac{2}{\sqrt{M}}$

En outre, si $t \in \left[u + \frac{2}{\sqrt{M}}, v\right]$, on a $f'(t) \geq 2\sqrt{M} = K$. On a de plus $f''(t) \geq 0$. On peut donc appliquer le résultat du 2) qui donne $\left|\int_{u+\frac{2}{\sqrt{M}}}^v \cos(f(t))dt\right| \leq \frac{4}{K} = \frac{2}{\sqrt{M}}$

On reprend alors (2) qui par inégalité triangulaire donne $\boxed{\left|\int_u^v \cos f(t)dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}}$

5) On a $\forall t \in [u,v], f''(t) > 0$, donc f' est continue et strictement croissante sur $[u,v]$.
Comme on suppose $f'(u)f'(v) < 0$, on a nécessairement $f'(u) < 0$ et $f'(v) > 0$ (puisque f' est croissante, le cas $f'(u) > 0$ et $f'(v) < 0$ est exclu).
Donc f' réalise une bijection de $[u,v]$ sur $[f'(u), f'(v)]$. Comme $0 \in [f'(u), f'(v)]$, que $f'(u) < 0$ et $f'(v) > 0$, $\boxed{\text{on a nécessairement l'unicité de l'existence de } w \in\,]u,v[\text{ tel que } f'(w) = 0}$.

Il vient alors avec Chasles : $\int_u^v \cos f(t)dt = \int_u^w \cos f(t)dt + \int_w^v \cos f(t)dt \quad (3)$

On a $f'(w) = 0$, donc $f'(w) \leq 0$. On peut donc appliquer le résultat du 5) sur l'intervalle $[u,w]$. Il vient ainsi $\left|\int_u^w \cos f(t)dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}$.

De même, comme $f'(w)=0$, on a $f'(w)\geq 0$. On peut donc appliquer le résultat du 5) sur l'intervalle $[w,v]$. Il vient ainsi $\left|\int_w^v \cos f(t)dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}$

Dès lors, on déduit de (3) que $\boxed{\left|\int_u^v \cos f(t)dt\right| \leq \frac{8}{\sqrt{M}}}$ grâce à l'inégalité triangulaire.

6) Dans cette question, on pose $f(t)=\alpha t+\beta kt^3$, avec $t\in[0,\pi]$

On a alors $f'(t)=\alpha+3\beta kt^2$, et $f''(t)=6\beta k t$

Soit $x\in\left[k^{-1/3},\pi\right]$. Soit $t\in\left[k^{-1/3},x\right]$. On a $f''(t)=6\beta k t\geq 6\beta k\, k^{-1/3}=6\beta k^{2/3}=M>0$

On distingue alors trois cas :

- si $f'(k^{-1/3})\geq 0$, alors les conditions des questions 3) et 4) sont satisfaites, donc $\left|\int_{k^{-1/3}}^{x} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}=\frac{4k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}\leq\frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}$
- sinon, on a $f'(k^{-1/3})<0$. Si $f'(x)\leq 0$, alors avec 4), on a également $\left|\int_{k^{-1/3}}^{x} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}\leq\frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}$
- Il reste à traiter le cas $f'(k^{-1/3})<0$ et $f'(x)>0$. Les conditions du 5) sont alors réunies. On déduit que $\left|\int_{k^{-1/3}}^{x} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt\right| \leq \frac{8}{\sqrt{M}}=\frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}$

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, on a bien : } \forall x\in\left[k^{-1/3},\pi\right], \left|\int_{k^{-1/3}}^{x} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt\right| \leq \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}}$$

7) Soit $x\in[0,\pi]$. Si $x\geq k^{-1/3}$, on a $\left|J_{k,\alpha}(x)\right|=\left|\int_0^{k^{-1/3}} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt+\int_{k^{-1/3}}^{x} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt\right|$.

Donc $\left|J_{k,\alpha}(x)\right|\leq\left|\int_0^{k^{-1/3}} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt\right|+\left|\int_{k^{-1/3}}^{x} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt\right|$

Puis $\left|J_{k,\alpha}(x)\right|\leq\int_0^{k^{-1/3}} \left|\cos(\alpha t+\beta kt^3)\right|dt+\left|\int_{k^{-1/3}}^{x} \cos(\alpha t+\beta kt^3)\,dt\right|$

Comme $x\in\left[k^{-1/3},\pi\right]$, on peut utiliser 6) et il vient :

$\left|J_{k,\alpha}(x)\right|\leq\int_0^{k^{-1/3}} 1\,dt+\frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}$. Donc $\left|J_{k,\alpha}(x)\right|\leq k^{-1/3}\left(1+\frac{8}{\sqrt{6\beta}}\right)$

Si $x\in\left[0,k^{-1/3}\right]$, on a $\left|J_{k,\alpha}(x)\right|\leq\int_0^x\left|\cos(\alpha t+\beta kt^3)\right|dt\leq x\leq k^{-1/3}\leq k^{-1/3}\left(1+\frac{8}{\sqrt{6\beta}}\right)$

$$\boxed{\text{Donc si on pose } C_1=\left(1+\frac{8}{\sqrt{6\beta}}\right)>0\text{, il vient bien } \forall x\in[0,\pi], \left|J_{k,\alpha}(x)\right|\leq C_1\,k^{-1/3}}$$