PCC : DS1 - 4h – calculatrices interdites

« Il est dur d'échouer. Mais il est pire de n'avoir jamais tenté de réussir » Roosevelt

Exercice 1 (début centrale PC 2019).

Soit f la fonction définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{\sin(x)+1}{\cos(x)}$.

1) Exprimer les dérivées f', f'' à l'aide des fonctions usuelles.
2) Montrer que f est de classe C^{∞} sur I et que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x\in I, f^{(n)}(x)=\frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$ (ici, $P_n(\sin(x))$ désigne une composée). Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et de sa dérivée $(P_n)'$ et expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 .
3) Justifier que pour tout entier naturel $n\geq 1$, le polynôme P_n est de degré n, à coefficients entiers naturels et que le coefficient du terme de degré n est égal à 1.
4) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$ pour $n\in\mathbb{N}$.
5) Montrer $\forall x\in I, 2f'(x)=f^2(x)+1$.
6) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=f^{(n)}(0)$. Exprimer $2a_1$ à l'aide de a_0 et démontrer la relation suivante : $\forall n\in\mathbb{N}^*, 2a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\,a_{n-k}$
7) Démontrer que f admet un développement limité à tout ordre n en 0, et qu'il est donné par $f(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+o(x^n)$, avec pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_{n+1}=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}b_kb_{n-k}$.

Problème 2 (début centrale PC 2017)

: on note E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites (U_n) convergentes telles que $\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N, U_n\neq\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ A toute suite (U_n) appartenant à E et de limite $a\in\mathbb{R}$, on associe la suite (U_n^c) définie à partir d'un certain rang par $U_n^c=\left|\frac{U_{n+1}-a}{U_n-a}\right|$.

E^c est l'ensemble des suites (U_n) de E telles que (U_n^c) soit convergente. La limite de (U_n^c) est alors notée a^c

Soit (U_n) une suite appartenant à E^c et soit a^c la limite de (U_n^c). On dit que la vitesse de convergence de la suite (U_n) est :

- lente si $a^c=1$
- géométrique de rapport a^c si $a^c\in\left]0,1\right[$
- rapide si $a^c=0$

On rappelle qu'une suite (U_n) est stationnaire si et seulement si $\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0, U_n=U_{n_0}$.

Si (U_n) est une suite appartenant à E telle que $U_n\underset{n\to+\infty}{\to}a$, et $r\in\left]1,+\infty\right[$, alors on dit que la convergence de la suite (U_n) vers a est d'ordre r si et seulement si la suite définie à partir d'un certain rang par $\frac{U_{n+1}-a}{\left|U_n-a\right|^r}$ est bornée.

1) Des résultats généraux.
   a) Montrer que l'ensemble E^c est non vide.
   b) E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
   c) Montrer que E^c est strictement inclus dans E.
   d) Soit (U_n) une suite appartenant à E^c. Montrer que a^c appartient au segment $[0,1]$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont éléments de E^c et déterminer leurs vitesses de convergence.

3) Dans cette question, on pose $V_n = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$
   a) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a $V_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
   b) En déduire que (V_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

4) Dans cette question, on considère $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$. On rappelle que cette suite est convergente (séries de Riemann) et on notera S sa limite.
   a) Soit $p \geq n+1$. Montrer $\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}\right)$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq S - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
   c) Montrer que (S_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

5) Soit (U_n) un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre $r \in]1,+\infty[$. Démontrer que la convergence de la suite (U_n) est rapide.

6) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive. Soit f définie sur I à valeurs dans I. Soit (U_n) définie par $U_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$. On suppose que la suite (U_n) converge vers un réel $a \in I$ et que f est dérivable en a.
   a) Montrer que $f(a) = a$.
   b) Montrer que si la suite (U_n) n'est pas stationnaire, alors elle appartient à E^c. Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(a)$.
   c) Montrer que si $|f'(a)| > 1$, alors (U_n) est stationnaire.
   d) Soit $r \geq 2$ un entier naturel. On suppose que f est de classe C^r sur I et que la suite (U_n) n'est pas stationnaire, Montrer que la vitesse de convergence de (U_n) est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in [\![1, n-1]\!], f^{(k)}(a) = 0$.

Problème 3 : **(Mines 2008, option PC).** Soit $[r,s]$ un segment de longueur non nulle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^2 à valeurs réelles.

On suppose dans les deux premières questions qu'il existe $K>0$ tel que $\forall t\in[r,s], |f'(t)|\geq K$ et $\forall t\in[r,s], f''(t)\geq 0$.

1) Montrer l'inégalité $\left|\int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}\,dt\right| \leq \frac{2}{K}$
2) En intégrant par parties l'intégrale $\int_r^s \frac{1}{f'(t)}\big(f'(t)\cos(f(t))\big)\,dt$, établir $\left|\int_r^s \cos(f(t))\,dt\right| \leq \frac{4}{K}$

Dans les questions de 3) à 5), $[u,v]$ est un segment de longueur non nulle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^2 à valeurs réelles. On suppose cette fois que $\exists M, \forall t\in[u,v], f''(t)\geq M>0$

3) On suppose $f'(u)\geq 0$. Etablir, pour $t\in\left[u+\frac{2}{\sqrt{M}}, v\right]$, $f'(t)\geq 2\sqrt{M}$.
4) En déduire que $\left|\int_u^v \cos(f(t))\,dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}$. On admettra que le résultat est identique si $f'(v)\leq 0$.
5) On suppose $f'(u)f'(v)<0$. Montrer qu'il existe un unique réel w de $]u,v[$ tel que $f'(w)=0$. En déduire que $\left|\int_u^v \cos(f(t))\,dt\right| \leq \frac{8}{\sqrt{M}}$

Soit maintenant $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta>0$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On pose $J_{k,\alpha}(x)=\int_0^x \cos(\alpha t+k\beta t^3)\,dt$.

6) Montrer que $\forall x\in\left[k^{-1/3},\pi\right], \left|\int_{k^{-1/3}}^x \cos(\alpha t+\beta k t^3)\,dt\right| \leq \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}$
7) En déduire qu'il existe $C_1>0$, ne dépendant pas de k,α telle que $\forall x\in[0,\pi], |J_{k,\alpha}(x)|\leq C_1 k^{-1/3}$