PC* : DS2 - 4h – calculatrices autorisées.

"N'aie pas peur d'avancer lentement. Aie peur de rester immobile." Proverbe chinois

Problème 1 : soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$

1) Prouver que pour tout entier naturel n, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
2) Prouver que pour tout entier naturel n, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$
3) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, I_{2n} en fonction de n à l'aide de factorielles.
4) Prouver que pour tout entier naturel n, $1 \geq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geq \dfrac{n+1}{n+2}$.
5) Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.
6) Prouver $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \left[-n, +\infty\right[, \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq e^u$.
7) Prouver que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right]$, $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$.
8) On pose $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$. On cherche sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   a) Vérifier que si $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n} dt = \sqrt{n} \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^n} du$
   b) Exprimer, pour $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^n} du$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t \, dt$ (on pourra poser $u = \tan t$).
   c) Déduire de 6), 7a) et 7b) un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
   d) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 2 (ENS 15, option BL) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = M_n(\mathbb{R})$. On définit $T_n : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ A \to \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \end{array}$.

1) Montrer que T_n est une application linéaire.
2) Déterminer, en justifiant la réponse, le rang de T_n et la dimension de son noyau.
3) Démontrer que $\forall A, B \in E, T_n(AB) = T_n(BA)$
4) On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $E = M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que pour tous entiers $1 \leq i, j, k, l \leq n$, on a $E_{i,j}E_{j,k} = E_{i,k}$ et $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$.
5) Soit $f : E \to \mathbb{R}$, linéaire. On suppose $\forall A, B \in E, f(AB) = f(BA)$
   a) Démontrer que si $i \neq j$, alors $f(E_{i,j}) = 0$. Prouver que $f(E_{i,i})$ ne dépend pas de i.
   b) Montrer qu'il existe un réel x tel que $\forall A \in E, f(A) = xT_n(A)$.

6) On considère $h:\begin{array}{l} E\to L(E,\mathbb{R}) \\ B\to h(B)\end{array}$, où $h(B):\begin{array}{l} E\to \mathbb{R} \\ A\to T_n(AB)\end{array}$

   a) Montrer que h est linéaire.
   b) Soient deux entiers i,j tels que $1\leq i,j\leq n$. Soit $B\in E$. Calculer $T_n\left(E_{i,j}B\right)$.
   c) Montrer que h est injective.
   d) En déduire que si $g\in L(E,\mathbb{R})$, il existe $B\in E$ telle que $\forall A\in E, g(A)=T_n(AB)$.

7) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. A-t-on $\forall A,B,C\in E, T_n(ABC)=T_n(ACB)$? Justifier la réponse (on pourra utiliser 5).

Problème 3 (Mines 17, option PSI) :

Notations :
Dans tout le problème, E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Soit $n,p\in\mathbb{N}^*$. La matrice nulle de $M_{n,p}(\mathbb{C})$ est noté $0_{n,p}$ et celle de $M_n(\mathbb{C})$ est notée 0_n.
Si $u\in L(E)$, u est **échangeur** si et seulement si il existe deux sous-espaces vectoriels F,G de E tels que :

$$E=F\oplus G,\ u(F)\subset G \text{ et } u(G)\subset F$$

On dit que u est **de carré nul** lorsque $u^2=u\circ u$ est l'application nulle.
Une matrice carrée A est **de carré nul** si et seulement si A^2 est la matrice nulle.
On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $u^n=0$
Si $u,v\in L(E)$, u est **semblable** à v lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $u=\varphi\circ v\circ\varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas v est semblable à u.
L'objectif est d'établir des liens entre les trois conditions suivantes :
$(C1)$: l'endomorphisme u est échangeur.
$(C2)$: il existe $a,b\in L(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u=a+b$.
$(C3)$: les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

1) Soit $M=\begin{pmatrix}0_n & B\\ A & 0_p\end{pmatrix}\in M_{n+p}(\mathbb{C})$, où $A\in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B\in M_{n,p}(\mathbb{C})$.

   Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix}0_n & B\\ 0_{p,n} & 0_p\end{pmatrix}\in M_{n+p}(\mathbb{C})$ et montrer que M est somme de deux matrices de carré nul.

2) Soit la matrice diagonale par blocs $D=\begin{pmatrix}I_n & 0_{n,p}\\ 0_{p,n} & -I_p\end{pmatrix}\in M_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}. En déduire que M est semblable à $-M$.

3) On suppose $(C1)$ vérifiée. On suppose que u est échangeur et on considère deux sous-espaces vectoriels F,G de E tels que $E=F\oplus G$, $u(F)\subset G$ et $u(G)\subset F$.
   a) On suppose que F et G ne sont pas nuls. Décrire la forme de la matrice de u dans une base B adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$.
   b) En déduire que u vérifie $(C2)$ et $(C3)$. *On n'oubliera pas de considérer le cas où F ou G est nul.*

4) On suppose dans cette question que $(C2)$ est vérifiée et que u est un *automorphisme* de E. Soit ainsi $a,b\in L(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u=a+b$.
   a) Soit $f\in L(E)$ tel que $f^2=0_{L(E)}$. Etablir que $\dim(\ker(f))\geq\dfrac{\dim(E)}{2}$.
   b) Démontrer que $E=\ker(a)\oplus\ker(b)$, que $\ker(a)=\mathrm{Im}(a)$ et que $\ker(b)=\mathrm{Im}(b)$.
   c) En déduire que u est échangeur (donc que $(C1)$ est vérifiée).

5) Soit dans cette question $u \in L(E)$, quelconque.

   a) Montrer que la suite $\left(\ker\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

   b) Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que $\forall k \geq p, \ker\left(u^k\right) = \ker\left(u^p\right)$. *On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace* $\ker\left(u^k\right)$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.

      Montrer alors $\ker\left(u^p\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker\left(u^k\right)$ et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

   c) Montrer que $E = \ker\left(u^p\right) \oplus \operatorname{Im}\left(u^p\right)$

6) Soit dans cette question $u \in L(E)$, non bijectif. On suppose que $(C2)$ est vérifiée et on considère $a, b \in L(E)$ tels que $u = a + b$ et $a^2 = b^2 = 0$. Soit, d'après 5b) un entier pair p tel que $\ker\left(u^p\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker\left(u^k\right)$

   On admet la validité du **théorème** suivant : tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

   a) Montrer que a et b commutent avec u^2.

   b) Montrer que $H = \operatorname{Im}\left(u^p\right)$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_H et b_H sont de carré nul.

   c) Montrer que u est échangeur. *On pourra utiliser, entre autres, le résultat obtenu au* 4c).