PC* : corrigé du DS 2

Problème 1 : soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos^{n+1} t\,dt$.

On effectue une intégration par parties en posant : $\begin{cases} u(t) = \cos^{n+1}(t) \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases}$, avec $\begin{cases} u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont C^1 et il vient : $I_{n+2} = \left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n t\,dt$.

On a donc $I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^n t\,dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. $\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$

2) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $H(n)$: "$(n+1)\, I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$".

- Pour $n = 0$, on a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = 1$, donc $H(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ vraie. On a donc $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$. On calcule alors :

$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_n I_{n+1}$ en utilisant 1). On a donc $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ et $H(n+1)$ vraie.

$\boxed{\text{On a donc bien } \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}}$

3) On a $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, donc pour $n \in \mathbb{N}$, il vient par récurrence en itérant le procédé :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} I_{2(n-2)} = ... = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}...\frac{1}{2} I_0.$$

On multiplie en haut et en bas par les termes pairs :

$I_{2n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)....1}{\left[2(n(n-1)(n-2)...1)\right]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$. On a donc $\boxed{I_{2n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)....1}{\left[2(n(n-1)(n-2)...1)\right]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(n+1)\, I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$, donc $I_n \neq 0$. En outre, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^{n+2}(t) \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$,

donc : par croissance de l'intégrale, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\,dt$

On a alors $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, donc en divisant par $I_n \neq 0$: $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

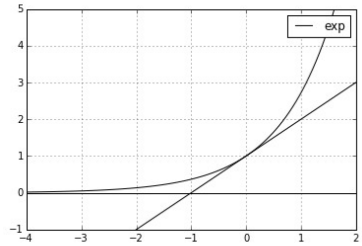
On a montré au 1) que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. $\boxed{\text{On a donc } \forall n \in \mathbb{N}, 1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{n+1}{n+2}}$

5) De 4), on déduit par encadrement que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Donc $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$

On a par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $n I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, puis $\dfrac{2nI_n^2}{\pi} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, et $\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Donc $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \left[-n, +\infty\right[$. On a pour $a \in \mathbb{R}$: $e^a \geq 1 + a$



.

On obtient donc $0 \leq \left(1 + \dfrac{u}{n}\right) \leq e^{\frac{u}{n}}$. Donc comme $x \to x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\text{on a bien } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \left[-n, +\infty\right[, \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u}$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \left[0, \sqrt{n}\right]$. On a alors $0 \leq t^2 \leq n$, donc $-t^2 \geq -n$.

On a alors directement $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$ avec 6).

Il reste à prouver $e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n}$, ce qui en prenant l'inverse équivaut à $e^{t^2} \geq \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n$. Ceci est vrai en utilisant à nouveau 6), puisque $t^2 \geq -n$. $\boxed{\text{On a donc bien } \forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}}$

8a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue un changement de variable et on pose $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}} = \varphi(t)$. On a bien φ de classe C^1 et $du = \dfrac{dt}{\sqrt{n}}$. Il vient alors directement $\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} dt = \sqrt{n} \int_0^1 \frac{1}{(1 + u^2)^n} du}$

8b) On effectue un nouveau changement de variable, et on pose $u = \psi(t) = \tan(t)$ avec $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et $u \in [0,1]$.

La fonction ψ est bien C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et on obtient $du = \dfrac{1}{\cos^2 t} dt$ et $\dfrac{1}{(1 + u^2)} = \dfrac{1}{1 + \tan^2(t)} = \cos^2(t)$

Donc $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{(1 + u^2)^n} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t \, dt}$

8c) D'après 6), on a $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \le J_n \le \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n} dt$.

Dès lors, avec 8a) et 8b) , on obtient $J_n \le \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t\, dt$, donc comme $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t\, dt \ge 0$ (puisque la fonction sous l'intégrale est positive), il vient $J_n \le \sqrt{n}\, I_{2n-2}$ (1) .

On étudie ensuite $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$ de manière analogue : on effectue un changement de variable et on pose $u = \frac{t}{\sqrt{n}} = \varphi(t)$. On a alors $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^1 \left(1-u^2\right)^n du$.

On pose ensuite $u = \sin(x)$ (sin est bien C^1). On a alors $d\,u = \cos(x) dx$ et il vient :

$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x)\right)^{2n+1} dx$. On a donc $J_n \ge \sqrt{n}\, I_{2n+1}$ (2)

Avec (1) et (2) , on déduit que $\boxed{\sqrt{n}\, I_{2n+1} \le J_n \le \sqrt{n}\, I_{2n-2}}$

8d) On justifie tout d'abord la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. On pose $h(t) = e^{-t^2}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et par croissance comparée, $t^2 h(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, donc $h(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc h l'est aussi et

$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge}}$.

De plus, On a vu au 5) que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Donc $I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ et $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Donc $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

De même, on a $\sqrt{n}\, I_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, et $\sqrt{n}\, I_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. $\boxed{\text{Donc par encadrement, } \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt}$

<u>Problème 2 (ENS 15, option BL) :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.

1) Soit $A, B \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $T_n(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^n (A+\lambda B)_{ii} = T_n(A) + \lambda T_n(B)$.

$\boxed{\text{Donc } T_n \text{ est une application linéaire}}$.

2) On démontre que $\mathrm{Im}(T_n) = \mathbb{R}$ par double inclusion. On a déjà $\mathrm{Im}(T_n) \subset \mathbb{R}$.

De plus, si $y \in \mathbb{R}$, $T_n(y E_{1,1}) = y$, où $E_{1,1}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la première ligne et première colonne qui vaut 1.

Donc $y \in \mathrm{Im}(T_n)$ et $\boxed{\mathrm{Im}(T_n) = \mathbb{R}}$

Ainsi, $rg(T_n) = 1$ et par théorème du rang, $\boxed{\dim\left(Ker(T_n)\right) = \dim(E) - 1 = n^2 - 1}$

3) Soit $A,B\in E$. Alors $T_n(AB)=\sum_{i=1}^{n}\left(AB\right)_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}B_{j,i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}B_{j,i}A_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\left(BA\right)_{j,j}=Tr(BA)$.

$\boxed{\text{On a donc bien } \forall A,B\in E, T_n(AB)=T_n(BA)}$

4) On suppose $1\le i,j,k,l\le n$.

On calcule $\left(E_{i,j}E_{j,k}\right)_{pq}=\sum_{s=1}^{n}\left(E_{i,j}\right)_{ps}\left(E_{j,k}\right)_{sq}=\left(E_{i,j}\right)_{pj}\left(E_{j,k}\right)_{jq}=\delta_{i,p}\delta_{k,q}=\left(E_{i,k}\right)_{pq}$.

On rappelle ici que $\delta_{ip}=1$ si $i=p$, et $\delta_{ip}=0$ si $i\neq p$. On a donc bien $E_{i,j}E_{j,k}=E_{i,k}$.

Pour $j\neq k$, il vient $\left(E_{i,j}E_{k,l}\right)_{pq}=\sum_{s=1}^{n}\left(E_{i,j}\right)_{ps}\left(E_{k,l}\right)_{sq}=\left(E_{i,j}\right)_{pj}\left(E_{k,l}\right)_{jq}=0$ car $\left(E_{k,l}\right)_{jq}=0$ puisque $j\neq k$.

$\boxed{\text{On a donc bien } E_{i,j}E_{k,l}=0 \text{ si } j\neq k}$.

5a) Soit $f:E\to\mathbb{R}$, linéaire. On suppose $\forall A,B\in E, f(AB)=f(BA)$

Alors soit $i\neq j$. On a $f\left(E_{i,j}\right)=f\left(E_{i,j}E_{j,j}\right)=f\left(E_{j,j}E_{i,j}\right)=f\left(0_E\right)=0$ car $f:E\to\mathbb{R}$ est linéaire.

$\boxed{\text{On a donc bien } f(E_{i,j})=0 \text{ si } i\neq j}$

De plus, pour $i\neq j$, $f\left(E_{i,i}\right)=f\left(E_{i,j}E_{j,i}\right)=f\left(E_{j,i}E_{i,j}\right)=f\left(E_{j,j}\right)$

Donc $\boxed{f(E_{i,i}) \text{ ne dépend pas de } i}$.

5b) On pose $x=f(E_{1,1})=f(E_{2,2})=..=f(E_{n,n})$.

Les applications linéaires f et xT_n coïncident sur la base canonique de E (en effet, $T_n\left(E_{i,i}\right)=1$ pour $1\le i\le n$, et $T_n\left(E_{i,j}\right)=0$ si $i\neq j$.).

$\boxed{\text{Donc il existe un réel } x \text{ tel que } \forall A\in E, f(A)=xT_n(A)}$.

6a) On considère $h:\begin{array}{l}E\to L(E,\mathbb{R})\\ B\to h(B)\end{array}$, où $h(B):\begin{array}{l}E\to\mathbb{R}\\ A\to T_n(AB)\end{array}$

Soit $B,C\in E$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $h\left(B+\lambda C\right)(A)=T_n(A\left(B+\lambda C\right))=T_n(AB+\lambda AC)$.

Or T_n est linéaire, donc $h\left(B+\lambda C\right)(A)=T_n(AB)+\lambda T_n(AC)=h\left(B\right)(A)+\lambda h\left(C\right)(A)=\left(h\left(B\right)+\lambda h\left(C\right)\right)(A)$.

Donc les applications $h\left(B+\lambda C\right)$ et $h\left(B\right)+\lambda h\left(C\right)$ coïncident en tous $A\in E$: elles sont égales.

$\boxed{\text{Donc } h \text{ est linéaire}}$.

6b) Soit deux entiers i,j tels que $1\le i,j\le n$. Soit $B\in E$.

Alors $T_n(E_{i,j}B)=T_n(E_{i,j}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}B_{p,q}E_{p,q})=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}B_{p,q}T_n(E_{i,j}E_{p,q})$ par linéarité de T_n .

Donc $T_n(E_{i,j}B)=\sum_{q=1}^{n}B_{j,q}T_n(E_{i,q})=B_{j,i}$ en utilisant que $E_{i,j}E_{p,q}=0$ si $j\neq p$ avec 4).

On a donc $\boxed{T_n(E_{i,j}B)=B_{j,i}}$

6c) Soit $B\in E$. On suppose que $h(B)=0$. Alors $\forall A\in E, h(B)(A)=T_n(AB)=0$.

En particulier, pour $1\le i,j\le n$, $h(B)(E_{i,j})=T_n(E_{i,j}B)=B_{j,i}=0$

Donc tous les coefficients de B sont nuls et $B=0$. Donc $Ker(h)=\left\{0\right\}$ et $\boxed{h \text{ est injective}}$.

6d) On sait que $\dim\left(L(E,\mathbb{R})\right)=\dim(E)$, donc comme h est injective, on peut dire qu'elle est bijective, donc surjective.

$\boxed{\text{Dès lors, si } g\in L(E,\mathbb{R}) \text{, il existe } B\in E \text{ telle que } \forall A\in E, g(A)=h(B)(A)=T_n(AB)}$.

7) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A\in E$. On pose, pour $B\in E$, $f(B)=T_n(AB)$. f est linéaire.
On suppose par l'absurde $\forall A,B,C\in E, T_n(ABC)=T_n(ACB)$.
Alors $\forall B,C\in E, f(BC)=f(CB)$, donc avec 5), il existe un réel x tel que $\forall B\in E, f(B)=xT_n(B)$.
On a donc $\forall B\in E, T_n(AB)=xT_n(B)$, où x dépend de A (mais pas de B).
On prend $A=E_{i,j}$, avec $1\le i,j\le n$ .et $i\ne j$.
On a donc $\forall B\in E, T_n(E_{i,j}B)=xT_n(B)$.
On l'applique pour $B=E_{j,i}$: $T_n(E_{i,j}E_{j,i})=xT_n(E_{j,i})$, donc $T_n(E_{i,i})=0$ et $1=0$. C'est absurde !

$\boxed{\text{Donc on n'a pas } \forall A,B,C\in E, T_n(ABC)=T_n(ACB)}$

Problème 3 (Mines 17, option PSI) :

1) Soit $M=\begin{pmatrix}0_n & B\\ A & 0_p\end{pmatrix}\in M_{n+p}(\mathbb{C})$, où $A\in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B\in M_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère $\begin{pmatrix}0_n & B\\ 0_{p,n} & 0_p\end{pmatrix}\in M_{n+p}(\mathbb{C})$ et on calcule $\boxed{\begin{pmatrix}0_n & B\\ 0_{p,n} & 0_p\end{pmatrix}^2=(0)}$.

Dès lors, on écrit $\boxed{M=\begin{pmatrix}0_n & 0_{n,p}\\ A & 0_p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0_n & B\\ 0_{p,n} & 0_p\end{pmatrix}}$. Comme $\begin{pmatrix}0_n & 0_{n,p}\\ A & 0_p\end{pmatrix}^2=(0)$, on conclut :

M est bien somme de deux matrices de carré nul.

2) Soit $D=\begin{pmatrix}I_n & 0_{n,p}\\ 0_{p,n} & -I_p\end{pmatrix}\in M_{n+p}(\mathbb{C})$. Alors $D^2=\begin{pmatrix}I_n & 0_{n,p}\\ 0_{p,n} & I_p\end{pmatrix}=I_{n+p}$. Donc $\boxed{D \text{ est inversible et } D^{-1}=D}$.

De plus, $DMD^{-1}=DMD=\begin{pmatrix}I_n & 0_{n,p}\\ 0_{p,n} & -I_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0_n & B\\ A & 0_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0_{n,p}\\ 0_{p,n} & -I_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_n & B\\ -A & 0_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0_{n,p}\\ 0_{p,n} & -I_p\end{pmatrix}=-M$.
Donc $\boxed{M \text{ est semblable à } -M}$

3a) On se place dans la base $C=\left(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_p\right)$ de E. On sait que u est échangeur, donc pour $k\in[\![1,n]\!]$, $u\left(f_k\right)\in G=Vect\left(g_1,\dots,g_p\right)$ et pour $k\in[\![1,p]\!]$, $u\left(g_k\right)\in F=Vect\left(f_1,\dots,f_n\right)$.

Dès lors, $\boxed{M_C(u)=M=\begin{pmatrix}0_n & B\\ A & 0_p\end{pmatrix}\in M_{n+p}(\mathbb{C})}$, où $A\in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B\in M_{n,p}(\mathbb{C})$.

3b) On suppose tout d'abord que F et G sont non nuls.
Montrons que u vérifie $(C2)$. On vient de voir que $M_C(u)=M=\begin{pmatrix}0_n & B\\ A & 0_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_n & 0_{n,p}\\ A & 0_p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0_n & B\\ 0_{p,n} & 0_p\end{pmatrix}$.
Alors en considérant l'unique application linéaire $a\in L(E)$ telle que $M_C(a)=\begin{pmatrix}0_n & 0_{n,p}\\ A & 0_p\end{pmatrix}$ et celle telle que $M_C(b)=\begin{pmatrix}0_n & B\\ 0_{p,n} & 0_p\end{pmatrix}$, on a $\boxed{u=a+b}$, avec $M_C(a^2)=(0)$ et $M_C(b^2)=(0)$, donc $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont de carré nul}}$.

On prouve que u vérifie $(C3)$. On a vu au 2) que si $D=\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} \in M_{n+p}(\mathbb{C})$, alors $DMD^{-1}=-M$. Donc si on prend d tel que $M_C(d)=M$, alors $u=d\circ(-u)\circ d^{-1}$, donc $\boxed{u \text{ et } -u \text{ sont semblables.}}$

Il reste à traiter le cas où $F=\{0_E\}$ (on procède de même si $G=\{0_E\}$).
Comme $E=F\oplus G$, on a $E=G$ et comme $u(G)\subset F$, u est nulle.
On prend donc $a=b=0_{L(E)}$, de carré nul, et on a bien $u=a+b$, donc $(C2)$ est vérifiée.
De plus, on a aussi $(C3)$ puisque $u=-u=Id_E\circ u\circ\left(Id_E\right)^{-1}=0_{L(E)}$.

Le résultat reste vrai lorsque $F=\{0_E\}$ ou $G=\{0_E\}$.

4a) On suppose dans cette question que $(C2)$ est vérifiée et que u est un *automorphisme* de E . Soit ainsi $a,b\in L(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u=a+b$.
Soit $f\in L(E)$ tel que $f^2=0_{L(E)}$. Alors si $y\in \operatorname{Im}(f)$, $\exists x\in E, f(x)=y$. Soit un tel x . Il vient $f(y)=f\circ f(x)=0_E$, donc $y\in Ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)\subset Ker(f)$

Par théorème du rang, on sait que $\dim(E)=\dim(Ker(f))+\dim(\operatorname{Im}(f))\le \dim(Ker(f))+\dim(Ker(f))$.

Donc on a bien $\boxed{\dim(\ker(f))\ge \dfrac{\dim(E)}{2}}$

4b) On sait que $u=a+b$, avec $a^2=b^2=0_{L(E)}$ et u bijective.
On prouve que $E=\ker(a)\oplus\ker(b)$. Soit $x\in\ker(a)\cap\ker(b)$. Alors $u(x)=a(x)+b(x)=0_E$, donc comme u est injective, $x=0_E$ et $\boxed{\ker(a)\cap\ker(b)=\{0_E\}}$.
Dès lors, $\dim(\ker(a)\oplus\ker(b))=\dim(\ker(a))+\dim(\ker(b))\ge 2\dfrac{\dim(E)}{2}$ en utilisant 4a).
Or par ailleurs, $\ker(a)\oplus\ker(b)\subset E$, donc $\dim(\ker(a)\oplus\ker(b))\le\dim(E)$.
On a donc $\boxed{\dim(\ker(a)\oplus\ker(b))=\dim(E)}$, donc on conclut $\boxed{E=\ker(a)\oplus\ker(b)}$

En outre, on sait que $\dim(\ker(a))\ge\dfrac{\dim(E)}{2}$. Si par l'absurde $\dim(\ker(a))>\dfrac{\dim(E)}{2}$, alors $\dim(\ker(a)\oplus\ker(b))>\dim(E)$, ce qui est exclu puisque $\ker(a)\oplus\ker(b)\subset E$.
On a donc $\dim(\ker(a))=\dfrac{\dim(E)}{2}$ et par théorème du rang, $\dim(\ker(a))=\dfrac{\dim(E)}{2}=\dim(\operatorname{Im}(a))$.
En outre, comme $a^2=b^2=0_{L(E)}$, il vient $\operatorname{Im}(a)\subset\ker(a)$.
Avec une inclusion et l'égalité des dimensions, $\boxed{\text{on conclut } \ker(a)=\operatorname{Im}(a) \text{ et de même } \ker(b)=\operatorname{Im}(b)}$

4c) On veut montrer que u est échangeur.

On prend $\boxed{F=\ker(a) \text{ et } G=\ker(b)}$. On vient de voir que $E=F\oplus G$.
Montrons que $u(\ker a)\subset\ker(b)$.
Soit $x\in\ker(a)$. On veut montrer $u(x)\in\ker(b)$ Alors $b(u(x))=b\left(a(x)+b(x)\right)=b^2(x)=0_E$.
Donc on a bien $u(x)\in\ker(b)$. Ainsi, $u(\ker a)\subset\ker(b)$

De même, on prouve que $u(\ker b)\subset\ker(a)$ et on conclut que $\boxed{u \text{ est échangeur}}$

5a) Soit $k\in\mathbb{N}$. On prouve que $\ker\left(u^k\right)\subset\ker\left(u^{k+1}\right)$.
Soit $x\in\ker\left(u^k\right)$. Alors $u^{k+1}(x)=u\left(u^k(x)\right)=u\left(0_E\right)=0_E$, donc $x\in\ker\left(u^{k+1}\right)$.

Donc $\boxed{\text{la suite } \left(\ker\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est croissante pour l'inclusion}}$.

5b) Soit $A=\left\{\dim\left(\ker\left(u^k\right)\right), k\in\mathbb{N}\right\}$. Alors A est un ensemble d'entiers naturels non vide et majoré par $n=\dim(E)$. Il possède donc un plus grand élément $d=\dim\left(\ker\left(u^p\right)\right)$, où $p\in\mathbb{N}$.

Soit alors $k\geq p$. Il vient $d=\dim\left(\ker\left(u^p\right)\right)\geq\dim\left(\ker\left(u^k\right)\right)$ car d est le maximum de A.

De plus, comme la suite $\left(\ker\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. Il vient $\ker\left(u^p\right)\subset\ker\left(u^k\right)$, donc $\dim\left(\ker\left(u^p\right)\right)\leq\dim\left(\ker\left(u^k\right)\right)$. On en déduit que $\dim\left(\ker\left(u^p\right)\right)=\dim\left(\ker\left(u^k\right)\right)$.

Avec une inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut $\boxed{\forall k\geq p, \ker\left(u^p\right)=\ker\left(u^k\right)}$

On montre maintenant que $\ker\left(u^p\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker\left(u^k\right)$ par double inclusion.

L'inclusion $\subset$ est claire. On montre donc $\supset$.

Soit $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker\left(u^k\right)$. Soit donc $k\in\mathbb{N}$ tel que $x\in\ker\left(u^k\right)$.

Alors si $k\geq p$, on sait avec b) que $\ker\left(u^p\right)=\ker\left(u^k\right)$, donc $x\in\ker\left(u^p\right)$

Si $k<p$, on a $\ker\left(u^k\right)\subset\ker\left(u^p\right)$ avec 5a), donc $x\in\ker\left(u^p\right)$.

Dans tous les cas, $x\in\ker\left(u^p\right)$, donc on a bien $\boxed{\ker\left(u^p\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker\left(u^k\right)}$

$\boxed{\text{Enfin, } \ker\left(u^p\right)=\ker\left(u^{2p}\right) \text{ donc on peut prendre } p \text{ pair}}$.

5c) On montre que $E=\ker\left(u^p\right)\oplus\operatorname{Im}\left(u^p\right)$.

Tout d'abord, par théorème du rang, $\dim(E)=\dim\left(\ker\left(u^p\right)\right)+\dim\left(\operatorname{Im}\left(u^p\right)\right)$.

On prouve que $\ker\left(u^p\right)\cap\operatorname{Im}\left(u^p\right)=\{0_E\}$.

Soit $x\in\ker\left(u^p\right)\cap\operatorname{Im}\left(u^p\right)$, alors $u^p(x)=0_E$ et $\exists y\in E, x=u^p(y)$. Soit un tel y.

Il vient $u^p(x)=u^{2p}(y)=0_E$, donc $y\in\ker\left(u^{2p}\right)=\ker\left(u^p\right)$ (puisque $\forall k\geq p, \ker\left(u^p\right)=\ker\left(u^k\right)$).

Donc $x=u^p(y)=0_E$ et on a bien $\ker\left(u^p\right)\cap\operatorname{Im}\left(u^p\right)=\{0_E\}$.

$\boxed{\text{Avec l'intersection et l'égalité des dimensions, on conclut } E=\ker\left(u^p\right)\oplus\operatorname{Im}\left(u^p\right)}$.

6a) On sait que $a,b\in L(E)$ sont tels que $u=a+b$ et $a^2=b^2=0$.

Il vient alors $u^2=(a+b)\circ(a+b)=a^2+a\circ b+b\circ a+b^2=a\circ b+b\circ a$.

On calcule $u^2\circ a=a\circ b\circ a+b\circ a\circ a=a\circ b\circ a$.

De même, $a\circ u^2=a\circ a\circ b+a\circ b\circ a=a\circ b\circ a$.

Donc on a bien $u^2\circ a=a\circ u^2$. On procède de même pour b.

$\boxed{\text{Donc } a \text{ et } b \text{ commutent avec } u^2}$.

6b) Montrons que $H=\operatorname{Im}\left(u^p\right)$ est stable par a.

Comme p est pair, on peut prendre ici $p=2q$, avec $q\in\mathbb{N}$.

Soit $y\in H$. Alors $\exists x\in E, y=u^p(x)$. Soit un tel x.

$a(y)=a\left(u^{2q}(x)\right)=\left(a\circ\left(u^2\circ u^2...\circ u^2\right)\right)(x)=\left(\left(u^2\circ u^2...\circ u^2\right)\circ a\right)(x)=u^p\left(a(x)\right)\in H$.

En effet, comme a commute avec u^2, on peut montrer par récurrence que a commute avec u^{2q}.

Donc on conclut que $\boxed{H=\mathrm{Im}\left(u^p\right) \text{ est stable par } a}$ (et de même stable par b).

On sait que pour $x\in E$, $a^2(x)=0_E$, donc cela reste vrai pour les éléments de H.

$\boxed{\text{Donc } a_H \text{ et } b_H \text{ sont de carré nul}}$.

6c) On veut montrer que u est échangeur. On cherche donc deux sous-espaces vectoriels F,G de E tels que $E=F\oplus G$, $u(F)\subset G$ et $u(G)\subset F$.

On sait que $E=\ker\left(u^p\right)\oplus\mathrm{Im}\left(u^p\right)$.

On montre tout d'abord que H est stable par u.

Si $y\in H=\mathrm{Im}\left(u^p\right)$, alors il existe $x\in E$ tel que $u^p(x)=y$.

Il vient $u(y)=u\left(u^p(x)\right)=u^p(u(x))\in H$, donc $\boxed{H \text{ est stable par } u}$

On cherche à appliquer 4c) à u_H et on prouve alors que u_H est un automorphisme de H.

Comme $H=\mathrm{Im}\left(u^p\right)$ est de dimension finie, il suffit de montrer que u_H est injective.

Soit $x\in\ker\left(u_H\right)$. Alors $x\in H=\mathrm{Im}\left(u^p\right)$ et $u_H(x)=u(x)=0_E$, donc $x\in\ker\left(u\right)$.

Comme $\ker\left(u^p\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker\left(u^k\right)$, on a donc $x\in\ker\left(u^p\right)\cap\mathrm{Im}\left(u^p\right)=\left\{0_E\right\}$, donc $x=0_E$

Donc $\ker\left(u_H\right)=\left\{0_E\right\}$, u_H est injective et donc $\boxed{u_H \text{ est un automorphisme de } H}$.

Dès lors, on applique 4c) à $u_H=a_H+b_H$:

u_H est échangeur, $H=\ker(a_H)\oplus\ker(b_H)$, avec $u\left(\ker(a_H)\right)\subset\ker(b_H)$ et $u\left(\ker(b_H)\right)\subset\ker(a_H)$.

On procède de même avec $K=Ker\left(u^p\right)$: si $x\in K=Ker\left(u^p\right)$, alors $u^p(x)=0_E$, donc $u^{p+1}(x)=0_E$ et $u(x)\in K=Ker\left(u^p\right)$. K est donc stable par u.

En outre, u_K est nilpotent : si $x\in K=Ker\left(u^p\right), u^p(x)=u_K^p(x)=0_E$ donc $u_K^p=0_{L(E)}$. On peut donc appliquer le théorème admis : soient C,D tels que $K=C\oplus D$, $u(C)\subset D$ et $u(D)\subset C$

Dès lors, on sait que $E=H\oplus K=\ker(a_H)\oplus\ker(b_H)\oplus C\oplus D=\left(\ker(a_H)\oplus C\right)\oplus\left(\ker(b_H)\oplus D\right)$.

On pose $F=\left(\ker(a_H)\oplus C\right)$ et $G=\left(\ker(b_H)\oplus D\right)$.

$\boxed{\text{Il vient } E=F\oplus G, u(F)\subset G \text{ et } u(G)\subset F. \text{ Donc } u \text{ est échangeur}}$.