7-Séries entières

A) Rayon et domaine de convergence

1) Séries entières

Définition : soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. $D(0,R)=\{z \in \mathbb{C}, |z|<R\}$ est le disque ouvert de centre O et de rayon R. $\overline{D}(0,R)=\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$ est le disque fermé de centre O et de rayon R.
$C(0,R)=\{z \in \mathbb{C}, |z|=R\}$ est le cercle de centre O et de rayon R.

Définition : Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est la série de fonctions de la variable complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$, avec pour tout $z \in \mathbb{C}$: $f_0(z)=a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(z)=a_n z^n$.
Le **domaine de convergence** de la série entière est $D=\left\{z \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge}\right\}$.

Remarques :

- pour $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit de la même manière la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x.
- On note $\sum a_n z^{2n}$ la série entière $\sum b_n z^n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n}=a_n, b_{2n+1}=0$.

Exemples : déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$
2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n^2}$
3) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$
4) $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^n$

2) Rayon de convergence.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A n'est pas majorée, on pose $\sup(A)=+\infty$. La borne supérieure de A est alors le plus petit majorant de A dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Lemme d'Abel (*) : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $(a_n z_0^n)$ est bornée. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|<|z_0|$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve : $\left|a_n z^n\right| = \left|a_n z_0^{\ n}\right| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$

Définition (*) : soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière, avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- **Le rayon de convergence** R de cette série entière, noté $R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right)$ est la borne supérieure de $A = \left\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\right\}$. On a $R \in \mathbb{R}_+ \cup \left\{+\infty\right\}$.
- Le **disque ouvert de convergence** est $\left\{z \in \mathbb{C}, \left|z\right| < R\right\}$.
- Le **cercle d'incertitude est** $C = \left\{z \in \mathbb{C}, \left|z\right| = R\right\}$ (lorsque $R \in \mathbb{R}_+$).

Proposition (*) : soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \in \mathbb{R}_+ \cup \left\{+\infty\right\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $\left|z\right| < R$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $\left|z\right| > R$, alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée. En particulier, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Preuve : Si $\left|z\right| < R$, $\left|z\right|$ n'est pas un majorant de $A = \left\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\right\}$. Donc on peut trouver $r \le R$, $(a_n r^n)$ est bornée et on conclut avec le lemme d'Abel.

Corollaire (*) : soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \in \mathbb{R}_+ \cup \left\{+\infty\right\}$. Soit $r \in \mathbb{R}_+$.

- Si $\left(a_n r^n\right)$ est bornée, alors $R \ge r$.
- Si $\left(a_n r^n\right)$ ne tend pas vers 0, alors $R \le r$

Preuve : c'est la contraposée du résultat précédent (si $\left(a_n r^n\right)$ ne tend pas vers 0, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ n'est pas absolument convergente).

Très utile en pratique pour déterminer le rayon de convergence.

Propriété : soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ ont même domaine de convergence, alors $R_a = R_b$.

Preuve : si par l'absurde $R_a < R_b$, on prend $R_a < r < R_b$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ diverge et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n r^n$ converge : c'est absurde car $\left\{z \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n \text{ converge}\right\}$

Remarques :

- $R = 0$ lorsque $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ n'est jamais convergente, sauf si $z = 0$.
- $R = +\infty$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout complexe z.
- Ce qui se passe sur le cercle d'incertitude (pour $|z| = R$) est subtil. Tout peut arriver.

Exemples : reprendre les exemples précédents. En plus :

1) Rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} 4^n z^n$
2) Rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+\cos^2 n) z^n$

Définition : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On suppose $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Alors la fonction d'une variable réelle f donnée par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ admet un domaine de définition D tel que $]-R, R[\subset D \subset [-R, R]$.

$]-R, R[$ est alors **l'intervalle ouvert de convergence**.

3) Outils pour calculer le rayon de convergence.

Proposition (*) : soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.

- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$

Preuve : si $a_n = O(b_n)$, alors soit $r < R_b$. On a $|a_n| r^n = O(|b_n| r^n)$ donc $r \leq R_a$. Puis on fait tendre r vers R_b donc $R_a \geq R_b$

Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$

Exemple : rayon de convergence de $\sum \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$.

Rappel : règle de d'Alembert pour les séries : soit (U_n) une suite de réels strictement positifs tels que $\frac{U_{n+1}}{U_n} \underset{n\to+\infty}{\to} a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $0 \leq a < 1$, alors la série $\sum U_n$ converge.
- Si $a \in [1, +\infty]$, alors $\sum U_n$ diverge grossièrement.

Règle de d'Alembert pour les séries entières (*) : soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$. On suppose aussi que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} b \in \mathbb{R}$.

Alors si $b \in \mathbb{R}_+^*$, $R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right) = \frac{1}{b}$ et si $b = 0$, $R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right) = +\infty$

Preuve : à faire.

Exemple (*) : trouver le rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^n$.

Soit $U_n = \binom{2n}{n} r^n$, avec $r > 0$. Alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 4r$. Puis $R = \frac{1}{4}$.

Propriété : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha z^n$ est égal à 1.

Preuve : avec d'Alembert.

Remarque : la règle de d'Alembert pour les séries entières ne fonctionne pas pour les séries lacunaires de la forme $\sum a_n z^{2n}$ ou $\sum a_n z^{2n+1}$, car de nombreux termes de la suite (a_n) sont nuls.

4) <u>Opérations et rayon de convergence.</u>

Propriété : soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.
Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$. Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Preuve : si $0 \leq r < \min(R_a, R_b)$, alors $(a_n + b_n) r^n$ est bornée, donc $r \leq R$.

Rappel : produit de Cauchy de deux séries numériques : soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes complexes absolument convergentes. Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série $\sum W_n$, avec $W_n = \sum_{p=0}^{n} U_p V_{n-p} = \sum_{p+q=n} U_p V_q$.

Alors la série $\sum W_n$ est absolument convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} U_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} V_q\right)$.

Proposition (*,PV) : produit de Cauchy de deux séries entières.
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$

Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q\right)$

Preuve : c'est le produit de Cauchy des séries numériques avec $U_p = a_p z^p$ et $V_q = b_q z^q$.
On l'applique pour $U_p = a_p z^p$ et $V_q = b_q z^q$ pour $|z| \leq r < \min(R_a, R_b)$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} W_n z^n$ converge par produit de Cauchy sur les séries numériques.

Exemple : soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$

Remarque : si on veut faire le produit de Cauchy de deux séries entières, toujours écrire ces séries sous la forme $\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$ (sinon la gestion des indices est trop compliquée)

5) Méthodes et exemples de recherche de rayon de convergence.

Méthode (*) : pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, on peut :

- Utiliser d'Alembert lorsque $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n \neq 0$.
- Procéder par double inégalité. Prendre $r > 0$ et étudier la suite $(a_n r^n)$. Si elle est bornée, alors $R \geq r$. Si $(a_n r^n)$ ne tend pas vers 0, alors $R \leq r$.
  Faire un dessin aide à réfléchir.
- Utiliser $a_n = O(b_n)$ ou $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Exemples : déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum \frac{n^2 + \ln(n)}{3^n} z^n$
2) $\sum e^{\cos(n)} z^n$ ($R = 1$)
3) $\sum \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n$ ($R = \frac{e}{2}$)

B) Régularité de la somme d'une série entière

1) Continuité.

Proposition (*) : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R,R[$.

Preuve : soit $[a,b] \subset]-R,R[$. Soit $r = \max(|a|,|b|) < R$. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ converge absolument donc on a convergence normale sur $[-r,r]$ donc sur $[a,b]$.

Remarque : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ ne converge pas toujours normalement sur $]-R,R[$. Il suffit pour cela de prendre $\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n$.

Proposition (*) : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $t \in]-R,R[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.
Alors f est continue sur $]-R,R[$.

Preuve : il y a CVU sur tout segment de la série de fonctions.

Propriété admise : soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de la variable complexe de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $z \in D(0,R)$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
Alors f est continue sur $D(0,R)$ (ainsi, si $z_0 \in D(0,R)$, alors $f(z) \underset{z\to z_0}{\to} f(z_0)$).

2) Intégration et dérivation terme à terme.

Proposition (*) : les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Preuve : notons R_1 et R_2 les deux rayons de convergence. $r^n |na_n| \geq r^n |a_n| \geq 0$ donc si $r < R_2$, $\left(r^n |a_n|\right)$ tend vers 0 et $r \leq R_1$ donc $R_1 \geq R_2 - \frac{1}{p}$ et $R_1 \geq R_2$.
Si $r < R_1$, alors en prenant $r < r' < R_1$, on a $r^n |na_n| = \frac{r^n}{r'^n} n |a_n r'^n| \to 0$, donc $r \leq R_2$ et $R_1 \leq R_2$.
On a donc bien $R_1 = R_2$

Corollaire : les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,a_n z^{n-1}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ ont même rayon de convergence : ce dernier est inchangé par dérivation ou intégration terme à terme.

Preuve rapide : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,a_n z^{n-1}$ converge si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,a_n z^n$ converge (séparer le cas $z=0$). De même, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} z a_{n-1} z^{n-1}$

Puis on applique le résultat à $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

Proposition (*) : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $t \in \left]-R,R\right[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Alors f est de classe C^∞ sur $\left]-R,R\right[$ et on peut dériver terme à terme.

On a $\forall t \in \left]-R,R\right[, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} t^n$.

Preuve : on montre que f est C^1 sur $\left]-R,R\right[$. On sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Soit $0<r<R$. On note $U_n(t) = a_n t^n$ pour $n\in\mathbb{N}$. On a CVN de la série de fonctions $\sum (U_n)'$ sur tout segment de $\left]-R,R\right[$ et CVS de $\sum U_n$ sur $\left]-R,R\right[$.

Par récurrence, $f^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (U_n)^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} t^n$

Exemple (*) : Pour $t \in \left]-1,1\right[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$.

Calculer $f^{(k)}(t)$ de deux manières et en déduire $\frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} t^{n-k}$.

$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$ et $f^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}$.

Proposition (*) : Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $t \in \left]-R,R\right[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors la fonction définie par $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} t^n$ est une primitive de f sur $\left]-R,R\right[$.

Ainsi, si $[c,d] \subset \left]-R,R\right[$, $\int_c^d \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_c^d t^n dt = F(d) - F(c)$.

Preuve : on applique le résultat précédent à F. On peut aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions sur $[c,d]\subset]-R,R[$. Il y a CVN donc CVU.

Exemples (*) : à partir de $\forall t\in]-1,1[\ \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$, on obtient :

- $\forall x\in]-1,1[, \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$
- $\forall x\in]-1,1[, \ln(1+x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$
- $\forall x\in]-1,1[, \arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

C) Développement en série entière d'une fonction

On note $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On prend maintenant une fonction et se demande si elle s'écrit sous forme de série entière.

1) Développement en série entière des fonctions usuelles.

Définition (*) : soit $r>0$. Une fonction $f:I\to K$ est dite développable en série entière sur $]-r,r[\subset I$ si et seulement si il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n t^n$ de rayon de convergence $R\geq r$ telle que $\forall t\in]-r,r[, f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n$.
f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si il existe $r>0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r,r[$

Propriété : soient f et g deux fonctions développables en séries entières sur $]-r,r[$ avec $r>0$. Alors $f+g$ et $f\,g$ sont DSE sur $]-r,r[$

Preuve : immédiat avec un produit de Cauchy.

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral (*) : soit a et b des réels quelconques d'un intervalle I, et soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :
$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$
En particulier, si $0\in I$, alors pour tout $x\in I$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$.

Preuve : par récurrence et intégration par parties.

Corollaire : inégalité de Taylor-Lagrange (*) : Soit $n \in \mathbb{N}$; soit *f* une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. Soit $a,b \in I$. On suppose qu'il existe $M_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M_{n+1}$. Alors $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$.

Preuve : on majore le reste intégral en distinguant suivant que $a \leq b$ ou pas.

Exemple : soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Donc $\exp$ est DSE sur $\mathbb{R}$ et on obtient son DSE.

Remarque : les DLs et la formule de Taylor-Young sont locaux ; le DSE et les formules de Taylor-Lagrange et Taylor reste intégral sont globaux.

DSE usuels : à connaitre avec soin. Expliquer comment on déduit les DSE sur $\mathbb{R}$ de $\cos, ch, sh, \sin$.

2) Unicité du développement en séries entières

Proposition (*,PV) : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $t \in \left]-R, R\right[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Preuve : $\forall t \in \left]-R, R\right[, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} t^n$.
On évalue la relation en $t = 0$.

Corollaire (*) : il y a unicité du développement en séries entières. S'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in \left]-r, r\right[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

En particulier, s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in \left]-r, r\right[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$

Preuve : on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ pour $x \in \left]-r, r\right[$. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$

3) Développement en série entière et série de Taylor.

Définition : soit f une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0. Alors la série de Taylor de f est la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarques :

- Si f est DSE au voisinage de 0, alors elle est égale à sa série de Taylor au voisinage de 0.
- Il est possible qu'une fonction DSE soit définie sur un intervalle plus grand que celui sur lequel elle est développable en séries entières.

  Par exemple, $\forall x \in \left]-1,1\right[, \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ mais c'est faux pour $x=2$.
- Il est même possible que la série de Taylor de f ait un rayon de convergence strictement positif mais que f ne soit pas DSE au voisinage de 0 :

  Exemple **:** soit $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=0$.

  On peut montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

  On déduit que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, que sa série de Taylor a un rayon de convergence infinie, mais que $\forall x \neq 0, f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

4) <u>Applications :</u>

- **Développements en séries entières de fonctions :**

Exemples (*) :

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Montrer que f est DSE sur $\left]-1,1\right[$ et trouver ce DSE. On trouve $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$.
2) Soit $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1+x}$. On fait un produit de Cauchy. $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ et $f(x) = -x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}\right)(-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+n}}{p}\right)x^n$
3) Pour développer une fraction rationnelle en série entière, on décompose d'abord en éléments simples.

   Exemple : DSE au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{1}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+2x}\right)$

   Puis $f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-(-2)^{n+1}\right)x^n$.

- **Utilisation des séries entières :**

1) **Montrer qu'une fonction est C^{∞} :**

On pose $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et préciser $f^{(n)}(0)$ si $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ et $f^{(n)}(0) = (-1)^n \dfrac{n!}{(2n+1)!}$.

2) **Exemples de calculs de somme** :

a) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{3^n}$. On utilise $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ avec $x = \dfrac{1}{3}$. On trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4}$.

b) Rayon de convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2+1}{n!} x^n$. On trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2+1}{n!} x^n = (x^2+x+1)e^x$.

c) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. On utilise $\forall x \in \left]-1,1\right[, \ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$. Et on prend la limite quand x tend vers 1, avec $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \dfrac{1}{n+1}$. Donc la série de fonctions CVU sur $[0,1]$ et est continue en 1.

D) <u>Equations différentielles et séries entières</u>

1) <u>Rappels sur les équations différentielles :</u>

Equations du premier ordre (*) :
On considère a, b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit A une primitive de a.
On note $(E): y' = a(x)y + b(x)$ et $(H): y' = a(x)y$ l'équation homogène associée.
Une fonction f définie sur I est solution de (E) si et seulement si f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$

- L'ensemble des solutions de (H) est donné par $S(H) = \{(x \to \lambda \exp(A(x))), \lambda \in K\}$
- Les solutions de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant n'importe quelle solution particulière de (E) aux solutions de l'équation homogène (H).
- Problème de Cauchy : Soit $x_0 \in I$. Pour tout $\alpha \in K$, il existe une unique solution de (E) satisfaisant la condition initiale $h(x_0) = \alpha$.
- On obtient une solution particulière de (E) avec la méthode de variation de la constante.

Exemples :

1) Trouver les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'=\dfrac{1}{x+2i}y$.
2) Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, bornée sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $f'+f$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Alors f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Equations du second ordre à coefficients constants :

En général, on ne sait pas résoudre les équations linéaires du second ordre.
On s'intéresse au cas où les **coefficients sont constants et réels**.
On suppose $a,b\in\mathbb{R}$ et $c:I\to K$, continue.
On note $(E):y''+a\,y'+b\,y=c(t)$ et $(H):y''+a\,y'+b\,y=0$.
$(C):x^2+a\,x+b=0$ est l'équation caractéristique associée.

- **Solutions de l'équation homogène (*) :**
  On distingue trois cas :
  - Si (C) admet deux solutions réelles distinctes q et s, alors les solutions de l'équation (H) sont les $t\to A\,e^{qt}+Be^{st}$, avec $A,B\in\mathbb{R}$.
  - Si (C) admet une unique solution réelle distincte r, alors les solutions de l'équation (H) sont les $t\to\left(At+B\right)e^{rt}$, avec $A,B\in\mathbb{R}$.
  - Si (C) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha+i\omega,\alpha-i\omega$ (avec $\omega>0$), alors les solutions de (H) sont les $t\to e^{\alpha t}\left(A\cos\omega t+B\sin\omega t\right)$, avec $A,B\in\mathbb{R}$ (ou encore les $t\to e^{\alpha t}\left(C\cos\left(\omega t+\varphi\right)\right)$, avec $C,\varphi\in\mathbb{R}$).
- **Solution particulière :**
  - On suppose que $d(x)=A\,e^{\alpha x}$, où $\alpha,A\in K$. On note m la multiplicité de α comme racine de $P(x)=a\,x^2+bx+c$ Alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $h(x)=B\,x^m e^{\alpha x}$ où $B\in K$.
  - On suppose que d est polynomiale. Alors on cherche une solution particulière polynomiale, de même degré que d.

Exemples :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y''+2y'+y=e^{-t}$
2) Déterminer le nombre de solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} y''+y=0 \\ y(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y''+y=0 \\ y(0)=0 \\ y(\pi)=1 \end{cases}$$

Equations du second ordre : cas général. On considère a,b,c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation $(E):y''+a(t)y'+b(t)y=c(t)$
$(H):y''+a(t)y'+b(t)y=0$ est l'équation homogène associée.

Cas général :

- Les solutions de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant n'importe quelle solution, dite particulière, de (E) aux solutions de l'équation homogène (H).
  Autrement dit, si y_0 est solution de (E), alors $S_{(E)} = \{y_0 + h, h \in S_H\}$.
- **Problème de Cauchy (admis) :** Soit $t_0 \in I$. Soit y deux fois dérivable sur I. Soient $y_0, v_0 \in K$. Soit le problème de Cauchy $(P) : \begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$.

  Alors (P) admet une unique solution.

2) Equations différentielles et séries entières :

On peut trouver un développement en série entière de fonction à l'aide d'une équation différentielle.

Exemple (*) : Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = (1+x)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et trouver ce développement.

On peut aussi trouver une solution particulière d'une équation différentielle à l'aide d'un développement en série entière :

Exemple : trouver les solutions développables en séries entières de $(H) : x\,y'' + 2y' + x\,y = 0$.

On trouve $f(x) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \lambda \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$.