X-ENS 24 option PSI

(1) Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que $M_n(u) = \emptyset$

Alors $O_n \notin M_n(u)$, et $\rho(O_n) = 0$, donc $R_u \leq 0$ et $R_u = 0$.

Réciproquement, si $R_u = 0$, alors $M_n(u) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), \rho(A) < 0\}$ est bien vide car $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\} \geq 0$.

Donc $\boxed{M_n(u) = \emptyset \iff R_u = 0}$

On prend pour $k \in \mathbb{N}$ $u_k = k!$. Alors $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc

$\boxed{R_u = 0 \text{ si } \forall k \in \mathbb{N}, u_k = k!}$ (avec la règle de d'Alembert)

(2) Supposons par l'absurde $M_n(u) = \{O_n\}$. Alors $R_u > \rho(O_n) = 0$.

On prend $A = \frac{1}{2} R_u I_n$. $Sp(A) = \{\frac{1}{2} R_u\}$ et $\rho(A) = \frac{1}{2} R_u < R_u$ donc $A \in M_n(u)$ et $M_n(u) \neq \{O_n\}$. Donc c'est absurde et $M_n(u) \neq \{O_n\}$

(3) On montre i) $\Rightarrow$ ii). On suppose $R_u = +\infty$.

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des valeurs propres de A est fini donc $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\} < +\infty$ et $A \in M_n(u)$.

Par définition, $M_n(u) \subset M_n(\mathbb{C})$ donc $M_n(u) = M_n(\mathbb{C})$ et on a ii)

ii) $\Rightarrow$ iii) Si $M_n(u) = M_n(\mathbb{C})$, $M_n(u) \neq \emptyset$ et si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $A+B \in M_n(\mathbb{C})$ donc iii) est vérifié.

On prouve iii) $\Rightarrow$ i)

On suppose $M_n(u) \neq \emptyset$. Avec 1), $R_u > 0$ et on peut considérer d telque $0<d<R_u$. Alors $A = dI_n \in M_n(u)$ car $\rho(dI_n) = d < R_u$

Dès lors, $A+A = 2dI_n \in M_n(u)$ et par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $pA = pdI_n \in M_n(u)$ donc $\rho(pA) = pd < R_u$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $pd < R_u$ et nécessairement, $R_u = +\infty$

Ceci achève la preuve de l'équivalence.

$\boxed{\text{On pose pour } k \in \mathbb{N} \quad u_k = \frac{1}{k!}}$. Alors $\sum u_k z^k$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc $R_u = +\infty$ et u vérifie i), ii), iii)

4.) on procède par double implication :

i) $\Rightarrow$ ii) On suppose i). Si $d>0$, $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\frac{z}{d}\right)^n$ converge si et seulement si $|z| < d$ donc si on pose $u_n = \frac{1}{d^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, il vient $R_u = d$.

Dès lors, si $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie (i), il vient $\rho(A) < d$ $(\forall d>0)$ donc nécessairement $\rho(A) = 0$

Donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$ et comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on a nécessairement $\chi_A = X^n$. Avec Cayley-Hamilton, $A^n = 0$ et A est nilpotente.

ii) $\Rightarrow$ i). On suppose $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = O_n$.

Alors X^k est un polynôme annulateur de A. (2

Donc $Sp(A) \subset \{0\}$ et $\rho(A) = 0$.

Donc si $R_v > 0$, on a bien $\rho(A) < R_v$ et $A \in M_n(v)$

Donc i) est vérifié, ce qui achève la preuve de l'équivalence.

5) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ (m est fixé).

(Alors $u_k^{(m)} = (k+1)\, u_{k+1}^{(m-1)} = (k+1)(k+2)\, u_{k+2}^{(m-2)}$

Donc par récurrence, $u_k^{(m)} = (k+1)(k+2) \cdots (k+m)\, u_{k+m}$)

On prouve $R_u = R_{u^{(m)}}$ par récurrence sur m.

- C'est vrai pour $m = 0$ car $u = u^{(0)}$
- On suppose $R_u = R_{u^{(m)}}$ pour un certain m.

  Alors $u_k^{(m+1)} = (k+1)\, u_{k+1}^{(m)}$ et $\sum_{k \geq 0} u_k^{(m+1)} z^k$ converge si et

  seulement si $\sum_{k \geq 0} k\, u_k^{(m)} z^{k-1}$ converge

  Donc $R\left(\sum u_k^{(m+1)} z^k\right) = R\left(\sum_{k \geq 1} k\, u_k^{(m)} z^k\right) = R\left(\sum_{k \geq 1} u_k^{(m)} z^k\right)$

  donc $R_{u^{(m+1)}} = R_{u^{(m)}}$ et on a bien $R_u = R_{u^{(m)}}$ ($\forall m \in \mathbb{N}$),

  donc $D_u = D_{u^{(m)}}$ $\forall m \in \mathbb{N}$

6) Soit $A \in M_n(u) \cap M_n(v)$. Alors $\begin{cases} \rho(A) < R_u \\ \rho(A) < R_v \end{cases}$

Or $R_{u+v} \geq \min(R_u, R_v) > \rho(A)$ donc $A \in M_n(u+v)$

De plus, <u>par produit de Cauchy</u> de deux séries entières,

$R_{u*v} \geqslant \min(R_u, R_v) > \rho(A)$ et $A \in M_n(u*v)$

donc $\underline{\underline{A \in M_n(u+v) \cap M_n(u*v)}}$

7) Soient $A, B \in M_n(u)$. Alors $\rho(A) < R_u$ et $\rho(B) < R_u$

On veut prouver $\rho(AB) < R_u$. <u>On montre $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$</u> :

on aura bien, comme $\rho(B) \leq 1$, $\rho(AB) < R_u$

On prouve pour cela que <u>A et B sont cotrigonalisable</u> : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$

$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1}$ et $B = P \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Si $\mu \in Sp(AB)$, $\exists k \in [\![1, n]\!]$, $\mu = \alpha_k \beta_k$ et $|\mu| \leq \rho(A)\rho(B)$

donc on a bien $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$. Il reste à prouver que A et B sont cotrigonalisable. Soit a, b canoniquement associées à A et B. Comme $A \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\lambda \in Sp(A)$. Comme $AB = BA$, $a \circ b = b \circ a$ et $E_\lambda(a)$ est stable par b. $b_{E_\lambda(A)}$ possède aussi une valeur propre complexe et un vecteur propre g_1 associé. On a $a(g_1) = \lambda g_1$ et $b(g_1) = \lambda' g_1$. On complète g_1 en une base $C = (g_1 - g_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et

$A = P \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & L \\ 0 & \end{pmatrix} P^{-1}$ et $B = P \begin{pmatrix} \lambda' & * \\ 0 & L' \\ 0 & \end{pmatrix} P^{-1}$. Comme $AB = BA$,

il vient $LL' = L'L$, avec $L, L' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. <u>Par récurrence</u> sur n, L et L' sont cotrigonalisable et ainsi A et B le sont.

On a donc bien $\boxed{\rho(AB) < R_u \text{ et } AB \in M_n(u)}$

8) $\mathcal{V}(A) = \{ P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\},\ P(A) = 0_n \}$.

D'après Cayley-Hamilton, $\chi_A \in \mathcal{V}(A)$ et $\chi_A \neq 0$

Donc $\boxed{\mathcal{V}(A) \neq \emptyset}$

9) $m = \min \left(\{ k \in \mathbb{N},\ \exists P \in \mathcal{V}(A),\ \deg P = k \} \right)$.

On prouve d'abord l'existence de p :

Soit $Q \in \mathcal{V}(A)$, $\deg Q = m$. $Q = \lambda X^m + R$, $\lambda \neq 0$ et $\deg R < m$.

On pose $p = \frac{1}{\lambda} Q$. Il convient ($p(A) = \frac{1}{\lambda} Q(A) = 0$ et p unitaire)

Montrons l'unicité : soit q un autre polynôme vérifiant i), ii)

et iii). Alors $(p-q)(A) = 0$ et $\deg(p-q) < m$.

Donc $p - q = 0$ et $p = q$ (sinon, $r = \deg(p-q) < m$ et $\exists S = p - q \in \mathcal{V}(A)$, $\deg(S) = r$, ce qui est absurde). On a bien l'unicité

10) Soit $P \in \mathcal{V}(A)$. On effectue la division euclidienne de P

par φ_A : $P = \varphi_A Q + R$, avec $\deg R < m$

Alors $R(A) = P(A) - \varphi_A(A) Q(A) = 0$. Donc R est nul (sinon,

$r = \deg(R) \in \{ k \in \mathbb{N}, \exists P_1 \in \mathcal{V}(A), \deg P_1 = k \}$ et $r < m$, où m

est le minimum de cet ensemble). Donc $P = \varphi_A Q$ et

φ_A divise P

11) φ_A est un polynôme annulateur de A, donc les valeurs propres de A sont parmi les racines de φ_A.

Montrons l'autre inclusion.

On décompose φ_A en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$:

$$\varphi_A = \prod_{k=1}^{m} (X-\lambda_k). \quad \varphi_A(A) = \prod_{k=1}^{m} (A-\lambda_k I_n) = 0$$

Si $i \in [\![1, m]\!]$, et que λ_i n'est pas valeur propre de A,

alors $\left(\prod_{k\neq i} (A-\lambda_k I_n)\right) \times (A-\lambda_i I_n) = 0$ et $(A-\lambda_i I_n)$ est inversible

Donc $\prod_{k\neq i} (A-\lambda_k I_n) = 0$ et $\psi_A = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} (X-\lambda_k I_n)$ annule A

avec $\psi_A \neq 0$, donc $m-1 \in \{k \in \mathbb{N}, \exists P \in V(A), \deg(P) = k\}$

ce qui est absurde puisque $m-1 < m$.

Donc <u>les racines de φ_A sont bien valeurs propres de A</u>

12) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. $\varphi_A = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, avec $b_m = 1$.

On note $\psi_A = \sum_{k=0}^{m} \overline{b_k} X^k$. Alors $\psi_A(A) = \sum_{k=0}^{m} \overline{b_k} A^k$.

Or, par récurrence, on a $A^k = \overline{A}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Donc $\psi_A(A) = \overline{\sum_{k=0}^{m} b_k A^k} = 0$, et ψ_A est unitaire, de degré m.

<u>Par unicité de P vérifiant c), ii) et iii)</u> (obtenue au (9)),

il vient $\psi_A = \varphi_A$ donc $\forall k \in [\![0, m]\!]$, $\overline{b_k} = b_k$.

Donc <u>$\varphi_A \in \mathbb{R}[X]$</u>

13) Si $P, Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$T(P+\lambda Q) = T(P) + \lambda T(Q)$ et T est linéaire car la dérivation l'est.

De plus, soit $P \in \ker(T)$. Alors $P(\lambda_1) = \dots = P^{(m_\ell - 1)}(\lambda_\ell) = 0$.

Donc $(X-\lambda_1)^{m_1} \times \dots (X-\lambda_\ell)^{m_\ell} / P$ (P possède au moins m racines comptées avec leur multiplicité). Comme $\deg P \leq m-1$, il vient $P=0$, donc $\ker(T) = \{0\}$ et T est injective.

Comme $\dim(\mathbb{C}_{m-1}[X]) = \dim(\mathbb{C}^m) = m$, T est bijective :

T est un isomorphisme

Ainsi, $(U(\lambda_1), U'(\lambda_1) \dots U^{(m_\ell - 1)}(\lambda_\ell))$ possède un unique antécédent par T :

$\exists! \, Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$, $\forall i \in [\![1, \ell]\!], \forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $Q^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$

14) On procède par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose $u(A) = P(A)$.

On effectue la division euclidienne de P par φ_A :

$P = \varphi_A C + R$, avec $\deg R < \deg(\varphi_A)$ donc $\deg R \leq m-1$.

Alors $u(A) = \varphi_A(A)\, C(A) + R(A) = R(A)$.

Donc $(Q-R)(A) = 0$, avec $\deg(Q-R) < m$. Donc $Q-R=0$ et $Q=R$

Avec la définition de Q, on a donc $\forall i \in [\![1,l]\!], \forall k \in [\![0,m_i-1]\!]$,
$R^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$.

De plus, pour $i \in [\![1,l]\!]$, λ_i est racine de multiplicité au moins m_i de φ_A donc de $\varphi_A C$ et $\forall k \in [\![0,m_i-1]\!], (\varphi_A C)^{(k)}(\lambda_i) = 0$.

Donc $\underline{\forall i \in [\![1,l]\!], \forall k \in [\![0,m_i-1]\!], P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\forall i \in [\![1,l]\!], \forall k \in [\![0,m_i-1]\!], P^{(k)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$

Donc avec les notations du sens direct, $P = \varphi_A C + R$, on a de même $\forall i \in [\![1,l]\!], \forall k \in [\![0,m_i-1]\!], R^{(k)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i)$, donc avec l'unicité de (13), $R = Q$.

Donc $\underline{\underline{u(A) = R(A) = P(A)}}$ car $\varphi_A(A) = 0$.

On a donc bien montré l'équivalence attendue.

(15) $\underline{\text{On prend } A = \alpha I_n}$. Alors $\underline{\underline{\varphi_A = (X-\alpha)}}$ (c'est un polynôme annulateur de A, et si P est constant, non nul, $P(A) \neq 0$, donc $m=1$).

$$T : \mathbb{C}_0[X] \to \mathbb{C}$$
$$P \mapsto P(\alpha)$$

Donc $Q \in \mathbb{C}_0[X]$ vérifie $Q(\alpha) = U(\alpha)$

Donc $\underline{Q = U(\alpha) \text{ et } Q(A) = U(\alpha) I_n}$.

On a donc bien $\boxed{u(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n}$

(16) : Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. (5

$\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)$ annule A avec Cayley-Hamilton.

De plus, avec (11), α, β (distincts) sont racines de φ_A, donc

$m = \deg \varphi_A \geq 2$ et $\boxed{\varphi_A = (X-\alpha)(X-\beta)}$ $(\deg \varphi_A \leq \deg(\chi_A))$

Donc $T : \mathbb{C}_1[X] \to \mathbb{C}^2$
$P \mapsto (P(\alpha), P(\beta))$

On a ici $\deg Q \leq 1$ et $\begin{cases} Q(\alpha) = U(\alpha) \\ Q(\beta) = U(\beta) \end{cases}$. Si on prend $Q = aX+b$,

on a donc $\begin{cases} a\alpha + b = U(\alpha) \\ a\beta + b = U(\beta) \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{U(\beta)-U(\alpha)}{\beta-\alpha} \\ b = U(\alpha) - \dfrac{U(\beta)-U(\alpha)}{\beta-\alpha}\alpha \end{cases}$

Donc $\underline{Q = \dfrac{U(\beta)-U(\alpha)}{\beta-\alpha} X + \dfrac{\beta U(\alpha) - \alpha U(\beta)}{\beta-\alpha}}$

Donc $\boxed{u(A) = Q(A) = \dfrac{U(\beta)-U(\alpha)}{\beta-\alpha} A + \dfrac{\beta U(\alpha) - \alpha U(\beta)}{\beta-\alpha} I_n}$

(17) Soit $B \in M_n(u)$.

a) On note $\beta_1, \ldots \beta_q$ les complexes qui sont valeurs propres de A ou de B (et éventuellement des deux)

On a alors $\varphi_A = (X-\beta_1)^{m_1} (\ldots) (X-\beta_q)^{m_q}$ (où m_i est la multiplicité de β_i, éventuellement nulle si $\beta_i \notin Sp(A)$).

De même $\varphi_B = (X-\beta_1)^{d_1} \ldots (X-\beta_q)^{d_q}$

Pour $1 \leq i \leq q$, on note $n_i = \max(m_i, d_i)$.

On considère R tel que $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $\forall k \in [\![0, n_i - 1]\!]$,

$R^{(k)}(\beta_i) = U^{(k)}(\beta_i)$

Donc $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $\forall k \in [\![0, m_i - 1]\!]$, $R^{(k)}(\beta_i) = U^{(k)}(\beta_i)$ donc

avec (14), $u(A) = R(A)$

De même, $u(B) = R(B)$

On a donc bien $u(A) = R(A)$ et $u(B) = R(B)$

(17) b) Avec les notations de l'énoncé, $\begin{cases} u(BA) = Q(BA) \\ u(AB) = Q(AB) \end{cases}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $A(BA)^k = A(BA) \cdots (BA) = (AB)^k A$.

Donc si $Q = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$,

$$A\,Q(BA) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(A(BA)^k\right) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k (AB)^k A = Q(AB)A$$

On a donc bien $A\,u(BA) = u(AB)\,A$

(18) On a ici $A \in M_n(u) \cap M_n(v)$.

On utilise (6) : alors $A \in M_n(u * v)$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $(u*v)_k = \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i}$ si $|z| < R_u$ et $|z| < R_v$,

par produit de Cauchy, $\sum_{k=0}^{+\infty} (u*v)_k z^k$ converge et on note

$$(U*V)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (u*v)_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k \sum_{k=0}^{+\infty} v_k z^k = U(z)V(z) = UV(z)$$

Par définition, on considère les polynômes Q_u, Q_v et Q_{u*v} (6

tels que $\begin{cases} u(A) = Q_u(A) \\ v(A) = Q_v(A) \\ u*v(A) = Q_{u*v}(A) \end{cases}$

On veut utiliser 14) pour prouver $(u*v)(A) = Q_u(A)Q_v(A) = (Q_uQ_v)(A)$

Soit $i \in [\![1, l]\!]$, $k \in [\![0, m_i - 1]\!]$.

Montrons $(U*V)^{(k)}(\lambda_i) = (Q_uQ_v)^{(k)}(\lambda_i)$, c'est-à-dire

$(UV)^{(k)}(\lambda_i) = (Q_uQ_v)^{(k)}(\lambda_i)$

On utilise la formule de Leibniz

$$(UV)^{(k)}(\lambda_i) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} U^{(j)}(\lambda_i) V^{(k-j)}(\lambda_i)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q_u^{(j)}(\lambda_i) Q_v^{(k-j)}(\lambda_i)$$

$$= (Q_uQ_v)^{(k)}(\lambda_i),$$ de nouveau avec Leibniz.

On conclut avec 14) : $u*v(A) = Q_u(A)Q_v(A) = u(A)v(A)$