Programme de colles PCC :

La colle commence obligatoirement par une question de cours. Cela peut être au choix :

- Deux énoncés parmi ceux qui sont proposés sans démonstration (pour au moins un élève du groupe)
- Un énoncé avec sa démonstration (uniquement parmi ceux qui sont exigibles).

Ensuite, le colleur propose un ou plusieurs exercices de son choix.

Du 27/01 au 31/01 (semaine 15)

Les questions de cours :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Théorème de transfert.
- Linéarité de l'espérance. Positivité et croissance.
- Si $|X| \leq Y$ et Y est d'espérance finie, alors X l'est aussi.
- Variance et écart-type de X lorsque X^2 est d'espérance finie.
- Variance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, binomiale, de Poisson ou de Bernoulli.
- Fonction génératrice d'une variable aléatoire. Continuité sur $[-1,1]$.
- Lien entre fonction génératrice et espérance finie.
- Définition de produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
- Familles orthogonales et orthonormées. Existence de bases orthonormées.
- Expression des coordonnées et du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée. Traduction matricielle.
- Orthogonal d'un sous espace vectoriel A. Supplémentaire orthogonal si A est de dimension finie.
- Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Définition, expression dans une base orthonormée. Gram-Schmidt.
- Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression à l'aide du projeté orthogonal.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :

- Fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, une loi géométrique ou une loi binomiale.
- Inégalité de Markov.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice sur les probabilités. Attention : **ce chapitre de probabilités traite essentiellement de tout ce qui concerne une seule variable aléatoire**. Ce qui est relatif aux couples, suites de variables aléatoires sera vu dans un chapitre ultérieur. Un exercice sur les espaces euclidiens est également possible dans un second temps (essentiellement des révisions de PCSI, mais les produits scalaires peuvent bien sûr utiliser des intégrales généralisées).

Du 03/02 au 07/02 (semaine 16)

Les questions de cours :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Définition de produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
- Familles orthogonales et orthonormées. Existence de bases orthonormées.
- Expression des coordonnées et du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée. Traduction matricielle.
- Orthogonal d'un sous espace vectoriel A. Supplémentaire orthogonal si A est de dimension finie.
- Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Définition, expression dans une base orthonormée. Gram-Schmidt.
- Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression à l'aide du projeté orthogonal.
- Isométrie d'un espace euclidien. Caractérisation par la conservation du produit scalaire, par son action sur les bases orthonormées.
- Symétries orthogonales et réflexions.
- Matrice orthogonale. Caractérisation à l'aide de ses colonnes ou de ses lignes.
- Lien entre matrices orthogonales et matrices de passage d'une base orthonormée à une autre.
- Caractérisation des isométries à l'aide de leurs matrices dans une base orthonormée.
- Déterminant d'une matrice orthogonale. Orientation de l'espace.
- Description des éléments de $O_2(\mathbb{R})$. Rotations, angle d'une rotation dans un plan orienté.
- Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques). Lien avec les matrices symétriques dans une base orthonormée.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux.
- Théorème spectral pour un endomorphisme autoadjoint et pour une matrice symétrique.
- Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.
- Matrices symétriques positives, définies positives. Caractérisation à l'aide de leur spectre.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :

- Si f est une isométrie et que $f(F) \subset F$, alors $f(F) = F$ et $f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.
- Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est une projection orthogonale.
- Caractérisation des endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs à l'aide de leur spectre.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice sur les espaces euclidiens.