10-Intégrales à paramètres

On note $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Objectif : étudier des fonctions de la forme suivante :

- $f(x)=\int_0^{+\infty} \arctan(t)e^{-xt}dt$
- $L(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ (transformée de Laplace).
- $F(f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ (transformée de Fourrier)

On s'intéresse à leur existence, leur continuité, leur dérivabilité et leurs limites aux bornes.

A) Rappels sur les intégrales

1) Convergence des intégrales généralisées.

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $f:I\to K$

Rappels : Une fonction f est **intégrable** sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur I et que $\int_I |f(t)|\,dt$ est convergente.

Si f est intégrable sur I, alors $\int_I f(t)\,dt$ est convergente.

Pour une fonction à valeurs positives, l'intégrabilité équivaut à la convergence de $\int_I f(t)\,dt$.

Intégrales de référence : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors :

- $t\to\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha<1$
- $t\to\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha>1$
- $t\to\ln(t)$ est intégrable en 0^+.
- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors $t\to e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha>0$.

Outils pour étudier l'intégrabilité (*) : on s'intéresse à l'intégrabilité de f sur $I=[a,b]$, $I=]a,b]$, $I=[a,b[$ ou $I=]a,b[$.

1) On commence par dire que f est continue (par morceaux) sur I.
2) On étudie ce qui se passe aux bornes ouvertes de l'intervalle. On peut :
   - Utiliser une **majoration** : $\forall t\in I, 0\le |f(t)|\le g(t)$ et g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

- Utiliser une comparaison :
  - Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, g est intégrable en b **si et seulement si** f est intégrable en b.
  - Si $f(x) \underset{x\to b}{=} o\big(g(x)\big)$ et g est intégrable en b, **alors** f est intégrable en b.

3) On peut aussi faire une intégration par parties ou un changement de variable.

Exemples :

1) On pose pour $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f(x)=\int_0^{+\infty}\cos(t^2)e^{-xt}\,dt$. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{1+t^4}\,dt$. Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Le théorème de convergence dominée et applications.

Théorème de convergence dominée (*, admis) : soit I un intervalle quelconque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux et une fonction f continue par morceaux sur I. On suppose :

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.
2) il existe φ intégrable sur I telle que $\forall t\in I, \forall n\in\mathbb{N}, |f_n(t)|\le\varphi(t)$ **(hypothèse de domination = hypothèse clé).**

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_I f(t)\,dt$

Exemple : limite et équivalent de $I_n=\int_0^1 t^n\ln\big(1+t^n\big)\,dt$

Remarque : dans tous ces exemples, on fait tendre le paramètre **entier** n vers $+\infty$. On veut étendre cette idée et étudier ce qui se passe quand un paramètre **réel** x tend vers $+\infty$

Rappel : caractérisation séquentielle de la limite : soit a un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I et $f: I\to\mathbb{R}$. Soit $b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Alors $f(x)\underset{x\to a}{\to} b$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de I telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, on a $f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\to} b$.

Ainsi, pour montrer $f(x)\underset{x\to+\infty}{\to} 0$, il suffit donc de montrer que pour toute suite (x_n) qui tend vers $+\infty$, on a $f(x_n)\underset{x\to+\infty}{\to} 0$

Théorème de convergence dominée à paramètre continu (*) : soient A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et a une extrémité, finie ou infinie, de A. Soit $g : \begin{matrix} A \times I \to K \\ (x,t) \mapsto g(x,t) \end{matrix}$. On suppose que

- $\forall t \in I, g(x,t) \underset{x \to a}{\to} l(t)$
- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto l(t)$ sont continues par morceaux sur I (accessoire)
- Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I, |g(x,t)| \le \varphi(t)$

Alors l est intégrable sur I et $\int_I g(x,t)\,dt \underset{x \to a}{\to} \int_I l(t)\,dt$.

Preuve : avec la caractérisation séquentielle de la limite. On prend une suite (x_n) qui tend vers a et on pose $g_n(t) = g(x_n, t)$ et on applique le théorème de convergence dominée.

Remarque : si $A = \mathbb{R}_+$ et qu'on étudie la limite de $f(x) = \int_I g(x,t)\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$, il suffit d'avoir la domination pour $x \in [A, +\infty[$, avec $A > 0$.

Exemples (*) :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^4}\,dt$. Etudier la limite de $h(x)$ en $+\infty$.
2) Déterminer la limite et un équivalent de $f(x) = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) e^{-xt}\,dt$ en $+\infty$. On trouve $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ en posant $u = xt$ ou avec une IPP.

B) Intégrales à paramètres

Dans ce paragraphe, A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et g est une fonction définie de $A \times I$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Continuité des intégrales à paramètres :

Théorème de continuité des intégrales à paramètre (*) : On suppose que :

1) Pour tout $x \in A$, $t \to g(x,t)$ est continue par morceaux sur I (secondaire).
2) Pour tout $t \in I$, $x \to g(x,t)$ est continue sur A (important)
3) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, |g(x,t)| \le \varphi(t)$ **(domination, hypothèse clé).**

Alors la fonction $f : x \to \int_J g(x,t)\,dt$ est définie et continue sur I.

Idée de preuve : Avec la caractérisation séquentielle de la continuité.
On prend $a \in A$ et (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a.
Alors $f(t) = g(a,t)$ et $f_n(t) = g(x_n, t)$ et on applique le théorème de convergence dominée.

Remarques :

- l'hypothèse de domination est nécessaire : on prend $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+t^2}\,dt$. On a $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{\pi}{2}$ si $x>0$, non continue sur $\mathbb{R}_+$.
- f est continue sur A si et seulement si elle est continue sur tout segment de A. Il suffit donc d'avoir l'hypothèse de domination sur tout segment de A ou sur des intervalles qui « recouvrent » A.

Exemples (*) :

1) On considère $f(x)=\int_0^1 \cos\left(\sqrt{xt}\right)dt$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2) On considère $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,dt$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Soit enfin $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2t)}{t(1+t^2)}\,dt$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Dérivation des intégrales à paramètres :

Définition : pour $t\in I$ fixé, on pose $h(x)=g(x,t)$.

1) On dit que g admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable si et seulement si h est dérivable en x et on note $h'(x)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$
2) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Lorsque h est k fois dérivable en x, on note $h^{(k)}(x)=\frac{\partial^k g}{\partial^k x}(x,t)$

Théorème de dérivation des intégrales à paramètres (*) : On suppose que :

1) Pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I.
2) Pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est C^1 sur A.
3) Pour tout $x\in A$, $t\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I (accessoire).
4) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall t\in I,\forall x\in A,\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\le\varphi(t)$.

Alors la fonction $f\ :x\to\int_I g(x,t)\,dt$ est définie et C^1 sur A. De plus, $f'(x)=\int_J\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$

Remarque (*) : Il suffit d'avoir l'hypothèse de domination sur tout segment de A ou sur des intervalles qui « recouvrent » A.

Exemples (*) :

1) On considère $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{1+t^3}dt$. Montrer que f est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$.
2) On considère $f(x)=\int_0^{+\infty}\arctan(t)e^{-xt}dt$. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'.
3) Soit enfin $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}dt$. Montrer que f est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$.

Utiliser $|\sin(xt)|\le|x|t$.

Théorème (*) : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que :

1) Pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est C^n sur A.
2) Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, pour tout $x\in A$, $t\mapsto\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I.
3) Pour tout $x\in A$, $t\mapsto\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur J (accessoire)
4) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall t\in I,\forall x\in A,\left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right|\le\varphi(t)$.

Alors la fonction $f\ :x\to\int_J g(x,t)\,dt$ est définie et C^n sur I.

De plus, $\forall k\in[\![1,n]\!], f^{(k)}(x)=\int_J\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\,dt$

Les conclusions restent valables quand les hypothèses de domination sont seulement vérifiées sur tout segment de A.

Remarque : pour montrer que f est de classe C^∞, on prouve qu'elle est C^n pour tout entier naturel n.

Exemple : transformée de Fourier. Soit g intégrable sur $\mathbb{R}$.

Soit $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-ix\,t}dt$. Montrer que f est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer ses dérivées.

Exercice (*) : On pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$,avec $x\in\left]0,+\infty\right[$.

1) Déterminer le domaine de définition de Γ.
2) Calculer $\Gamma(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
3) Montrer que Γ est continue sur $\left]0,+\infty\right[$
4) Montrer que Γ est C^∞ sur $\left]0,+\infty\right[$ et préciser $\Gamma^{(k)}(x)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\left]0,+\infty\right[$.